Math. P.
1724
12

Math. P. 172 $\frac{1}{}$ (2

Kerz

Die

allgemeine Umkehrung der Reihen

nebst

Anwendung derselben

auf die

vollständige Lösung numerischer Gleichungen.

Von

Ferdinand Kerz,

Rittmeister in der Großherzoglich Hessischen [illegible]

Zweite Abtheilung.

Darmstadt.

Hofbuchhandlung von Gustav Jonghaus.

1861.

Die allgemeine Umkehrung der Reihen

nebst

Anwendung derselben

auf die

vollständige Lösung numerischer Gleichungen.

Von

Ferdinand Kerz,

Rittmeister in der Großherzoglich Hessischen Gendarmerie.

Zweite Abtheilung.

Darmstadt.

Hofbuchhandlung von Gustav Jonghaus.

1861.

28 – B.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Buchdruckerei von Chr. Kichler in Darmstadt.

Im Juni 1850 erschien von mir eine Monographie über die allgemeine Umkehrung der Reihen und deren Anwendung auf die Lösung numerischer Gleichungen. Als eine zweite Abtheilung derselben übergebe ich hiermit die in dieser Beziehung fortgesetzten Studien dem sachverständigen Publikum.

Es ist hierin das allgemeine Glied der Umkehrung bestimmt, die anfänglichen entwickelten Reihen sind summirt, die Bedingungen für die Convergenz der umgekehrten Reihen sind näher erörtert und letztere dergestalt angeordnet, daß ihre Fortsetzung keinen Schwierigkeiten unterliegt.

Durch die Anwendung der erhaltenen Summenformeln auf die Lösungen der Gleichungen beschränken sich dann, sobald convergente Reihen gebildet sind, die ganzen Rechnungsoperationen auf ein einmaliges Quadratwurzelausziehen und die sogenannten vier Species.

Schließlich ist die Umkehrung der Reihen auch auf die Lösung der transcendenten Gleichungen angewendet und hierdurch ein directes Verfahren zur Lösung derselben ermöglicht.

Es mag hier noch erwähnt werden, daß die in einigen Exemplaren der ersten Abtheilung enthaltene Anzeige von einem Fehler in dem Coefficienten von B^5 der Formel (86. 15.) auf einem Versehen beruht. Eine wiederholte Ausrechnung der genannten Formel ergab ihre vollständige Richtigkeit, welche sich auch durch Substituirung von Zahlenwerthen leicht nachweisen läßt.

Darmstadt, im Juni 1861.

Der Verfasser.

Umkehrung

des

Polynomiums

von der Form:

$$0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + Hx^7 + \ldots$$

---

101. Wir wollen die Umkehrung dieses Polynomiums, welche bereits in (31.) enthalten ist, noch einmal vornehmen, dabei aber das Bildungsgesetz der Coefficienten der entwickelten Glieder streng beibehalten und die Glieder selbst nach den Stellen ordnen, welche sie vermöge der Entwickelung einzunehmen haben.

1) $0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + Hx^7 + Jx^8 + \ldots$

2) $x = -AC^0B^{-1}$

$$-\tfrac{1}{1}\cdot 2_0 A^2 C\, B^{-3}$$

$$-\tfrac{1}{2}\cdot 4_1 A^3 C^2 B^{-5} + \tfrac{1}{1}\cdot 3_0 A^3 \cdot C^0 D\cdot B^{-4}$$

$$-\tfrac{1}{3}\cdot 6_2 A^4 C^3 B^{-7} + \tfrac{1}{2}\cdot 5_1 A^4 \cdot 2C\, D\cdot B^{-6} - \tfrac{1}{1}\cdot 4_0 A^4 \; C^0\cdot E\cdot B^{-5}$$

$$-\tfrac{1}{4}\cdot 8_3 A^5 C^4 B^{-9} + \tfrac{1}{3}\cdot 7_2 A^5 \cdot 3C^2 D\cdot B^{-8} - \tfrac{1}{2}\cdot 6_1 A^5\cdot[2_2C^0D^2 + 2C\cdot E]\cdot B^{-7} + \tfrac{1}{1}\cdot 5_0 A^5\cdot C^0\cdot F\cdot B^{-6}$$

$$-\tfrac{1}{5}\cdot 10_4 A^6 C^5 B^{-11} + \tfrac{1}{4}\cdot 9_3 A^6 \cdot 4C^3 D\cdot B^{-10} - \tfrac{1}{3}\cdot 8_2 A^6\cdot[3_2C D^2 + 3C^2\cdot E]\cdot B^{-9} + \tfrac{1}{2}\cdot 7_1 A^6\cdot[2\cdot 2_2 C^0D\cdot E + 2C\cdot F]\cdot B^{-8} - \tfrac{1}{1}\cdot 6_0 A^6\cdot C^0\cdot G\cdot B^{-7}$$

$$-\tfrac{1}{6}\cdot 12_5 A^7 C^6 B^{-13} + \tfrac{1}{5}\cdot 11_4 A^7 \cdot 5C^4 D\cdot B^{-12} - \tfrac{1}{4}\cdot 10_3 A^7\cdot[4_2C^2D^2 + 4C^3\cdot E]\cdot B^{-11} + \tfrac{1}{3}\cdot 9_2 A^7\cdot[3_3C^0D^3 + 2\cdot 3_2 C\, D\cdot E + 3C^2\cdot F]\cdot B^{-10} - \tfrac{1}{2}\cdot 8_1 A^7\cdot[2\cdot 2_2C^0D\cdot F + 2_2C^0\cdot E^2 + 2C\cdot G]\cdot B^{-9}$$

$$-\tfrac{1}{7}\cdot 14_6 A^8 C^7 B^{-15} + \tfrac{1}{6}\cdot 13_5 A^8 \cdot 6C^5 D\cdot B^{-14} - \tfrac{1}{5}\cdot 12_4 A^8\cdot[5_2C^3D^2 + 5C^4\cdot E]\cdot B^{-13} + \tfrac{1}{4}\cdot 11_3 A^8\cdot[4_3C\, D^3 + 2\cdot 4_2 C^2D\cdot E + 4C^3\cdot F]\cdot B^{-12} - \tfrac{1}{3}\cdot 10_2 A^8\cdot[3\cdot 3_3C^0D^2\cdot E + 2\cdot 3_2C\, D\cdot F + 3_2C\cdot E^2 + 3C^2\cdot G]\cdot B^{-11}$$

$$-\tfrac{1}{8}\cdot 16_7 A^9 C^8 B^{-17} + \tfrac{1}{7}\cdot 15_6 A^9 \cdot 7C^6 D\cdot B^{-16} - \tfrac{1}{6}\cdot 14_5 A^9\cdot[6_2C^4D^2 + 6C^5\cdot E]\cdot B^{-15} + \tfrac{1}{5}\cdot 13_4 A^9\cdot[5_3C^2D^3 + 2\cdot 5_2 C^3D\cdot E + 5C^4\cdot F]\cdot B^{-14} - \tfrac{1}{4}\cdot 12_3 A^9\cdot[4_4C^0D^4 + 3\cdot 4_3C\, D^2\cdot E + 2\cdot 4_2C^2D\cdot F + 4_2C^2\cdot E^2 + 4C^3\cdot G]\cdot B^{-13}$$

$$-\tfrac{1}{9}\cdot 18_8 A^{10} C^9 B^{-19} + \tfrac{1}{8}\cdot 17_7 A^{10} \cdot 8C^7 D\cdot B^{-18} - \tfrac{1}{7}\cdot 16_6 A^{10}\cdot[7_2C^5D^2 + 7C^6\cdot E]\cdot B^{-17} + \tfrac{1}{6}\cdot 15_5 A^{10}\cdot[6_3C^3D^3 + 2\cdot 6_2 C^4D\cdot E + 6C^5\cdot F]\cdot B^{-16} - \tfrac{1}{5}\cdot 14_4 A^{10}\cdot[5_4C\, D^4 + 3\cdot 5_3C^2D^2\cdot E + 2\cdot 5_2C^3D\cdot F + 5_2C^3\cdot E^2 + 5C^4\cdot G]\cdot B^{-15}$$

$$-\tfrac{1}{10}\cdot 20_9 A^{11} C^{10} B^{-21} + \tfrac{1}{9}\cdot 19_8 A^{11} \cdot 9C^8 D\cdot B^{-20} - \tfrac{1}{8}\cdot 18_7 A^{11}\cdot[8_2C^6D^2 + 8C^7\cdot E]\cdot B^{-19} + \tfrac{1}{7}\cdot 17_6 A^{11}\cdot[7_3C^4D^3 + 2\cdot 7_2 C^5D\cdot E + 7C^6\cdot F]\cdot B^{-18} - \tfrac{1}{6}\cdot 16_5 A^{11}\cdot[6_4C^2D^4 + 3\cdot 6_3C^3D^2\cdot E + 2\cdot 6_2C^4D\cdot F + 6_2C^4\cdot E^2 + 6C^5\cdot G]\cdot B^{-17}$$

$$-\tfrac{1}{11}\cdot 22_{10} A^{12} C^{11} B^{-23} + \tfrac{1}{10}\cdot 21_9 A^{12} \cdot 10C^9 D\cdot B^{-22} - \tfrac{1}{9}\cdot 20_8 A^{12}\cdot[9_2C^7D^2 + 9C^8\cdot E]\cdot B^{-21} + \tfrac{1}{8}\cdot 19_7 A^{12}\cdot[8_3C^5D^3 + 2\cdot 8_2 C^6D\cdot E + 8C^7\cdot F]\cdot B^{-20} - \tfrac{1}{7}\cdot 18_6 A^{12}\cdot[7_4C^3D^4 + 3\cdot 7_3C^4D^2\cdot E + 2\cdot 7_2C^5D\cdot F + 7_2C^5\cdot E^2 + 7C^6\cdot G]\cdot B^{-19}$$

$$-\tfrac{1}{12}\cdot 24_{11} A^{13} C^{12} B^{-25} + \tfrac{1}{11}\cdot 23_{10} A^{13} \cdot 11C^{10} D\cdot B^{-24} - \tfrac{1}{10}\cdot 22_9 A^{13}\cdot[10_2C^8D^2 + 10C^9\cdot E]\cdot B^{-23} + \tfrac{1}{9}\cdot 21_8 A^{13}\cdot[9_3C^6D^3 + 2\cdot 9_2 C^7D\cdot E + 9C^8\cdot F]\cdot B^{-22} - \tfrac{1}{8}\cdot 20_7 A^{13}\cdot[8_4C^4D^4 + 3\cdot 8_3C^5D^2\cdot E + 2\cdot 8_2C^6D\cdot F + 8_2C^6\cdot E^2 + 8C^7\cdot G]\cdot B^{-21}$$

$$-\tfrac{1}{13}\cdot 26_{12} A^{14} C^{13} B^{-27} + \tfrac{1}{12}\cdot 25_{11} A^{14} \cdot 12C^{11} D\cdot B^{-26} - \tfrac{1}{11}\cdot 24_{10} A^{14}\cdot[11_2C^9D^2 + 11C^{10}\cdot E]\cdot B^{-25} + \tfrac{1}{10}\cdot 23_9 A^{14}\cdot[10_3C^7D^3 + 2\cdot 10_2 C^8D\cdot E + 10C^9\cdot F]\cdot B^{-24} - \tfrac{1}{9}\cdot 22_8 A^{14}\cdot[9_4C^5D^4 + 3\cdot 9_3C^6D^2\cdot E + 2\cdot 9_2C^7D\cdot F + 9_2C^7\cdot E^2 + 9C^8\cdot G]\cdot B^{-23}$$

$$-\ldots \quad +\ldots \quad -\ldots \quad +\ldots \quad -\ldots$$

3) Bezeichnung des Werthes der allgemeinen Glieder der Vertikalreihen.

$\overset{2}{\mathfrak{M}}_{I} = \overset{2}{m}[1]$

$\overset{3}{\mathfrak{M}}_{I} = \overset{3}{m}[1]$

$\overset{4}{\mathfrak{M}}_{I} = \overset{4}{m}[1]$, $\overset{4}{\mathfrak{M}}_{II} = \overset{4}{m}[E]$

$\overset{5}{\mathfrak{M}}_{I} = \overset{5}{m}[1]$, $\overset{5}{\mathfrak{M}}_{II} = \overset{5}{m}[E]$, $\overset{5}{\mathfrak{M}}_{III} = \overset{5}{m}[F]$

$\overset{6}{\mathfrak{M}}_{I} = \overset{6}{m}[1]$, $\overset{6}{\mathfrak{M}}_{II} = \overset{6}{m}[E]$, $\overset{6}{\mathfrak{M}}_{III} = \overset{6}{m}[F]$, $\overset{6}{\mathfrak{M}}_{IV} = \overset{6}{m}[E^2]$, $\overset{6}{\mathfrak{M}}_{V} = \overset{6}{m}[G]$

Fortsetzung der Horizontalreihe 8. $. C^0 . J . B^{-9}$

" " " 9. $+ 2_2 C^0 . F^2 + 2_2 C^0 . 2EG + 2\ C . J] . B^{-11} - \ldots$

" " " 10. $+ 3_2 C\ . F^2 + 3_2 C\ . 2EG + 3\ C^2 . J] . B^{-13} - \ldots$

" " " 11. $+ 4_2 C^2 . F^2 + 4_2 C_2 . 2EG + 4\ C^3 . J] . B^{-15} - \ldots$

" " " 12. $+ 5_2 C^3 . F^2 + 5_2 C^3 . 2EG + 5\ C^4 . J] . B^{-17} - \ldots$

" " " 13. $+ 6_2 C^4 . F^2 + 6_2 C^4 . 2EG + 6\ C^5 . J] . B^{-19} - \ldots$

" " " 14. $+ 7_2 C^5 . F^2 + 7_2 C^5 . 2EG + 7\ C^6 . J] . B^{-21} - \ldots$

$- \ldots$

$\overset{8}{\mathfrak{M}}_{IX} = \overset{8}{m}[F^2]$ $\overset{8}{\mathfrak{M}}_{X} = \overset{8}{m}[2EG]$ $\overset{8}{\mathfrak{M}}_{XI} = \overset{8}{m}[J]$

$$+ \tfrac{1}{1} . 7_0 A^7 . \qquad . C^0 . H . B^{-8}$$

$$+ \tfrac{1}{2} . 9_1 A^8 . [\quad 2 . 2_2 C^0 D . G + 2_2 C^0 . 2EF + 2\ C . H] . B^{-10} - \tfrac{1}{1} . 8_9 A^8 .$$

$$+ \tfrac{1}{3} . 11_2 A^9 . [\quad 3 . 3_3 C^0 D^2 . F + 3 . 3_3 C^0 D . E^2 + 2 . 3_2 C\ D . G + 3_2\ C . 2EF + 3\ C^2 . H] . B^{-12} - \tfrac{1}{2} . 10_1 A^9 . [\quad 2 . 2_2 C^0 D . H$$

$$+ \tfrac{1}{4} . 13_3 A^{10} . [\quad 4 . 4_4 C^0 D^3 . E + 3 . 4_3 C\ D^2 . F + 3 . 4_3 C\ D . E^2 + 2 . 4_2 C^2 D . G + 4_2\ C^2 . 2EF + 4\ C^3 . H] . B^{-14} - \tfrac{1}{3} . 12_2 A^{10} . [\quad 3 . 3_3 C^0 D^2 . G + 3 . 3_3 C^0 D . 2EF + 2 . 3_2 C\ D . H + 3_3 C^0 . E^3$$

$$+ \tfrac{1}{5} . 15_4 A^{11} . [5_5 C^0 D^5 + 4 . 5_4 C\ D^3 . E + 3 . 5_3 C^3 D^2 . F + 3 . 5_3 C^2 D . E^2 + 2 . 5_2 C^3 D . G + 5_2\ C^3 . 2EF + 5\ C^4 . H] . B^{-16} - \tfrac{1}{4} . 14_3 A^{11} . [\quad 4 . 4_4 C^0 D^3 . F + 6 . 4_4 C^0 D^2 . E^2 + 3 . 4_3 C\ D^2 . G + 3 . 4_3 C\ D . 2EF + 2 . 4_2 C^2 D . H + 4_3 C\ . E^3$$

$$+ \tfrac{1}{6} . 17_5 A^{12} . [6_5 C\ D^5 + 4 . 6_4 C^2 D^3 . E + 3 . 6_3 C^2 D^2 . F + 3 . 6_3 C^3 D . E^2 + 2 . 6_2 C^4 D . G + 6_2\ C^4 . 2EF + 6\ C^5 . H] . B^{-18} - \tfrac{1}{5} . 16_4 A^{12} . [\quad 5 . 5_5 C^0 D^4 . E + 4 . 5_4 C\ D^3 . F + 6 . 5_4 C\ D^2 . E^2 + 3 . 5_3 C^2 D^2 . G + 3 . 5_3 C^2 D . 2EF + 2 . 5_2 C^3 D . H + 5_3 C^2 . E^3$$

$$+ \tfrac{1}{7} . 19_6 A^{13} . [7_5 C^2 D^5 + 4 . 7_4 C^3 D^3 . E + 3 . 7_3 C^4 D^2 . F + 3 . 7_3 C^4 D . E^2 + 2 . 7_2 C^5 D . G + 7_2\ C^5 . 2EF + 7\ C^6 . H] . B^{-20} - \tfrac{1}{6} . 18_5 A^{13} . [6_6 C^0 D^6 + 5 . 6_5 C\ D^4 . E + 4 . 6_4 C^2 D^3 . F + 6 . 6_4 C^2 D^2 . E^2 + 3 . 6_3 C^3 D^2 . G + 3 . 6_3 C^3 D . 2EF + 2 . 6_2 C^4 D . H + 6_3 C^3 . E^3$$

$$+ \tfrac{1}{8} . 21_7 A^{14} . [8_5 C^3 D^5 + 4 . 8_4 C^4 D^3 . E + 3 . 8_3 C^5 D^2 . F + 3 . 8_3 C^5 D . E^2 + 2 . 8_2 C^6 D . G + 8_2\ C^6 . 2EF + 8\ C^7 . H] . B^{-22} - \tfrac{1}{7} . 20_6 A^{14} . [7_6 C D^6 + 5 . 7_5 C^2 D^4 . E + 4 . 7_4 C^3 D^3 . F + 6 . 7_4 C^3 D^2 . E^2 + 3 . 7_3 C^4 D^2 . G + 3 . 7_3 C^4 D . 2EF + 2 . 7_2 C^5 D . H + 7_3 C^4 . E^3$$

$$+ \ldots$$

$\overset{7}{\mathfrak{M}}_{I} = \overset{7}{m}[1]$ $\overset{7}{\mathfrak{M}}_{II} = \overset{7}{m}[E]$ $\overset{7}{\mathfrak{M}}_{III} = \overset{7}{m}[F]$ $\overset{7}{\mathfrak{M}}_{IV} = \overset{7}{m}[E^2]$ $\overset{7}{\mathfrak{M}}_{V} = \overset{7}{m}[G]$ $\overset{7}{\mathfrak{M}}_{VI} = \overset{7}{m}[2EF]$ $\overset{7}{\mathfrak{M}}_{VII} = \overset{7}{m}[H]$

$\overset{8}{\mathfrak{M}}_{I} = \overset{8}{m}[1]$ $\overset{8}{\mathfrak{M}}_{II} = \overset{8}{m}[E]$ $\overset{8}{\mathfrak{M}}_{III} = \overset{8}{m}[F]$ $\overset{8}{\mathfrak{M}}_{IV} = \overset{8}{m}[E^2]$ $\overset{8}{\mathfrak{M}}_{V} = \overset{8}{m}[G]$ $\overset{8}{\mathfrak{M}}_{VI} = \overset{8}{m}[2EF]$ $\overset{8}{\mathfrak{M}}_{VII} = \overset{8}{m}[H]$ $\overset{8}{\mathfrak{M}}_{IX} = \overset{8}{m}[E^3]$

102. Wenn man das Bildungsgesetz der Umkehrung der Reihen (101.) näher untersucht, so ergibt sich, daß sämmtliche Glieder der Entwickelung Funktionen von A und B sind, daß sie sich vertikal ordnen nach auf einander folgenden Potenzen von A und daß der Exponent von A zugleich die Zahl der Horizontalreihe bezeichnet — von dem ersten Gliede der Entwickelung an gezählt — in welcher sich ein fragliches Glied vorfindet.

Sämmtliche Glieder der Entwickelung bilden unendlich viele Hauptgruppen unendlicher, in vertikaler Richtung fortschreitender, Reihen. Die Hauptgruppen folgen staffelförmig aufeinander und ihre Vertikalreihen schichten sich selbst wieder in ihren Anfangsgliedern staffelförmig und bilden Gruppen unter sich.

Die erste Hauptgruppe besteht nur aus einem einzigen Gliede, jede der zweiten und dritten Hauptgruppe aus einer einzigen Vertikalreihe, die vierte Hauptgruppe besteht aus zwei Vertikalreihen, die fünfte aus drei, die sechste aus fünf, die siebente aus sieben, die achte aus eilf Vertikalreihen ꝛc. Ueberhaupt ist die Zahl der Vertikalreihen einer Hauptgruppe abhängig von der Zahl der Glieder derjenigen Klammer, in welcher D, D^2, D^3, D^4 ꝛc. erscheint, was (nach 6) aus der Entwickelung des Polynomiums (1.) [daselbst mit Berücksichtigung von (21.) D für C geschrieben] hinlänglich erhellet.

103. Die allgemeinen Glieder der entwickelten Vertikalreihen ergeben sich leicht aus den bereits entwickelten Gliedern, da das Gesetz des Fortschreitens derselben klar vorliegt.

Bezeichnet m die Zahl und $\mathfrak{M}$ den Werth des allgemeinen Gliedes irgend einer Vertikalreihe der Entwickelung, wobei m jedesmal die Zahl der Horizontalreihe, also den Exponenten von A bezeichnen soll (102.), so wollen wir den Buchstaben $\mathfrak{M}$ noch mit charakteristischen Zeichen versehen, um zugleich die Zahl der Hauptgruppe und die der betreffenden Vertikalreihe auszudrücken.

Es sei allgemein

$$\overset{p}{\mathfrak{M}}_q$$

der Werth des mit A^m als Faktor behafteten Gliedes der qten Vertikalreihe der pten Hauptgruppe.

Vertikalreihen, deren allgemeine Glieder die Form haben:

$$\overset{p}{\mathfrak{M}}_q, \quad \overset{p+1}{\mathfrak{M}}_q, \quad \overset{p+2}{\mathfrak{M}}_q, \quad \overset{p+3}{\mathfrak{M}}_q, \ldots .$$

wollen wir correspondirende Reihen nennen.

Die allgemeinen Glieder der entwickelten Vertikalreihen sollen nun, nach correspondirenden Reihen geordnet, nachstehend zusammengestellt und aus ihnen wieder die allgemeinen Glieder der correspondirenden Reihen abgeleitet werden.

Allgemeine Glieder der Vertikalreihen.

104. 1) $\overset{2}{\mathfrak{M}}_I = -\frac{1}{m-1}(2m-2)_{m-2}\, A^m (m-1)_0\, C^{m-1} D^0 \,.\, B^{-2m+1}$

2) $\overset{3}{\mathfrak{M}}_I = +\frac{1}{m-2}(2m-3)_{m-3}\, A^m (m-2)_1\, C^{m-3} D \,.\, B^{-2m+2}$

3) $\overset{4}{\mathfrak{M}}_I = -\frac{1}{m-3}(2m-4)_{m-4}\, A^m (m-3)_2\, C^{m-5} D^2 \,.\, B^{-2m+3}$

4) $\overset{5}{\mathfrak{M}}_I = +\frac{1}{m-4}(2m-5)_{m-5}\, A^m (m-4)_3\, C^{m-7} D^3 \,.\, B^{-2m+4}$

5) $\overset{6}{\mathfrak{M}}_I = -\frac{1}{m-5}(2m-6)_{m-6}\, A^m (m-5)_4\, C^{m-9} D^4 \,.\, B^{-2m+5}$

6) $\overset{7}{\mathfrak{M}}_I = +\frac{1}{m-6}(2m-7)_{m-7}\, A^m (m-6)_5\, C^{m-11} D^5 \,.\, B^{-2m+6}$

u. s. w.

7) $\overset{p}{\mathfrak{M}}_I = (-1)^{p-1} \,.\, \frac{1}{m-p+1}(2m-p)_{m-p}\, A^m (m-p+1)_{p-2}\, C^{m-2p+3} D^{p-2}[1] \,.\, B^{-2m+p-1}$

8) $\overset{4}{\mathfrak{M}}_{II} = -\frac{1}{m-3}(2m-4)_{m-4}\, A^m \,.\, (m-3)\; C^{m-4}\; D^0\; [E]\,.\, B^{-2m+3}$

9) $\overset{5}{\mathfrak{M}}_{II} = +\frac{1}{m-4}(2m-5)_{m-5}\, A_m \,.\, 2(m-4)_2\; C^{m-6}\; D\; [E]\,.\, B^{-2m+4}$

10) $\overset{6}{\mathfrak{M}}_{II} = -\frac{1}{m-5}(2m-6)_{m-6}\, A^m \,.\, 3(m-5)_3\; C^{m-8}\; D^2\; [E]\,.\, B^{-2m+5}$

11) $\overset{7}{\mathfrak{M}}_{II} = +\frac{1}{m-6}(2m-7)_{m-7}\, A^m \,.\, 4(m-6)_4\; C^{m-10}\; D^3\; [E]\,.\, B^{-2m+6}$

12) $\overset{8}{\mathfrak{M}}_{II} = -\frac{1}{m-7}(2m-8)_{m-8}\, A^m \,.\, 5(m-7)_5\; C^{m-12}\; D^4\; [E]\,.\, B^{-2m+7}$

13) $\overset{9}{\mathfrak{M}}_{II} = +\frac{1}{m-8}(2m-9)_{m-9}\, A^m \,.\, 6(m-8)_6\; C^{m-14}\; D^5\; [E]\,.\, B^{-2m+8}$

u. s. w.

14) $\overset{p}{\mathfrak{M}}_{II} = (-1)^{p-1}\,.\,\frac{1}{m-p+1}(2m-p)_{m-p}\, A^m\, (p-3)(m-p+1)_{p-3}\; C^{m-2p+4}\; D^{p-4}\; [E]\,.\, B^{-2m+p-1}$

---

15) $\overset{5}{\mathfrak{M}}_{III} = +\frac{1}{m-4}(2m-5)_{m-5}\, A^m \,.\, (m-4)\; C^{m-5}\; D^0\; [F]\,.\, B^{-2m+4}$

16) $\overset{6}{\mathfrak{M}}_{III} = -\frac{1}{m-5}(2m-6)_{m-6}\, A^m \,.\, 2(m-5)_2\; C^{m-7}\; D\; [F]\,.\, B^{-2m+5}$

17) $\overset{7}{\mathfrak{M}}_{III} = +\frac{1}{m-6}(2m-7)_{m-7}\, A^m \,.\, 3(m-6)_3\; C^{m-9}\; D^2\; [F]\,.\, B^{-2m+6}$

18) $\overset{8}{\mathfrak{M}}_{III} = -\frac{1}{m-7}(2m-8)_{m-8}\, A^m \,.\, 4(m-7)_4\; C^{m-11}\; D^3\; [F]\,.\, B^{-2m+7}$

19) $\overset{9}{\mathfrak{M}}_{III} = +\frac{1}{m-8}(2m-9)_{m-9}\, A^m \,.\, 5(m-8)_5\; C^{m-13}\; D^4\; [F]\,.\, B^{-2m+8}$

u. s. w.

20) $\overset{p}{\mathfrak{M}}_{III} = (-1)^{p-1}\,.\,\frac{1}{m-p+1}(2m-p)_{m-p}\, A^m \,.\, (p-4)(m-p+1)_{p-4}\; C^{m-2p+5}\; D^{p-5}\; [F]\,.\, B^{-2m+p-1}$

---

21) $\overset{6}{\mathfrak{M}}_{IV} = -\frac{1}{m-5}(2m-6)_{m-6}\, A^m \,.\, 2_2(m-5)_2\; C^{m-7}\; D^0\,.\, [E^2]\,.\, B^{-2m+5}$

22) $\overset{7}{\mathfrak{M}}_{IV} = +\frac{1}{m-6}(2m-7)_{m-7}\, A^m \,.\, 3_2(m-6)_3\; C^{m-9}\; D\,.\, [E^2]\,.\, B^{-2m+6}$

23) $\overset{8}{\mathfrak{M}}_{IV} = -\frac{1}{m-7}(2m-8)_{m-8}\, A^m \,.\, 4_2(m-7)_4\; C^{m-11}\; D^2\,.\, [E^2]\,.\, B^{-2m+7}$

24) $\overset{9}{\mathfrak{M}}_{IV} = +\frac{1}{m-8}(2m-9)_{m-9}\, A^m \,.\, 5_2(m-8)_5\; C^{m-13}\; D^3\,.\, [E^2]\,.\, B^{-2m+8}$

u. s. w.

25) $\overset{p}{\mathfrak{M}}_{IV} = (-1)^{p-1}\,.\,\frac{1}{m-p+1}(2m-p)_{m-p}\, A^m\, (p-4)_2\, (m-p+1)_{p-4}\; C^{m-2p+5}\; D^{p-6}\; [E^2]\,.\, B^{-2m+p-1}$

---

26) $\overset{6}{\mathfrak{M}}_{V} = - \frac{1}{m-5} (2m-6)_{m-6}\, A^m \,.\, (m-5)\, C^{m-6}\, D^0\, [G] \,.\, B^{-2m+5}$

27) $\overset{7}{\mathfrak{M}}_{V} = + \frac{1}{m-6} (2m-7)_{m-7}\, A^m \,.\, 2(m-6)_2\, C^{m-8}\, D\, [G] \,.\, B^{-2m+6}$

28) $\overset{8}{\mathfrak{M}}_{V} = - \frac{1}{m-7} (2m-8)_{m-8}\, A^m \,.\, 3(m-7)_3\, C^{m-10}\, D^2\, [G] \,.\, B^{-2m+7}$

29) $\overset{9}{\mathfrak{M}}_{V} = + \frac{1}{m-8} (2m-9)_{m-9}\, A^m \,.\, 4(m-8)_4\, C^{m-12}\, D^3\, [G] \,.\, B^{-2m+8}$

u. s. w.

30) $\overset{p}{\mathfrak{M}}_{V} = (-1)^{p-1} \,.\, \frac{1}{m-p+1} (2m-p)_{m+p}\, A^m\, (p-5)(m-p+1)_{p-5}\, C^{m-2p+6}\, D^{p-6}\, [G] \,.\, B^{-2m+p-1}$

---

31) $\overset{7}{\mathfrak{M}}_{VI} = + \frac{1}{m-6} (2m-7)_{m-7}\, A^m \,.\, 2_2(m-6)_2\, C^{m-8}\, D^0\, [2EF] \,.\, B^{-2m+6}$

32) $\overset{8}{\mathfrak{M}}_{VI} = - \frac{1}{m-7} (2m-8)_{m-8}\, A^m \,.\, 3_2(m-7)_3\, C^{m-10}\, D\, [2EF] \,.\, B^{-2m+7}$

33) $\overset{9}{\mathfrak{M}}_{VI} = + \frac{1}{m-8} (2m-9)_{m-9}\, A^m \,.\, 4_2(m-8)_4\, C^{m-12}\, D^2\, [2EF] \,.\, B^{-2m+8}$

34) $\overset{10}{\mathfrak{M}}_{VI} = - \frac{1}{m-9} (2m-10)_{m-10}\, A^m \,.\, 5_2(m-9)_5\, C^{m-14}\, D^3\, [2EF] \,.\, B^{-2m+9}$

u. s. w.

35) $\overset{p}{\mathfrak{M}}_{VI} = (-1)^{p-1} \,.\, \frac{1}{m-p+1} (2m-p)_{m-p}\, A^m\, (p-5)_2(m-p+1)_{p-5}\, C^{m-2p+6}\, D^{p-7}\, [2EF] \,.\, B^{-2m+p-1}$

---

36) $\overset{7}{\mathfrak{M}}_{VII} = + \frac{1}{m-6} (2m-7)_{m-7}\, A^m \quad (m-6)\, C^{m-7}\, D^0\, [H] \,.\, B^{-2m+6}$

37) $\overset{8}{\mathfrak{M}}_{VII} = - \frac{1}{m-7} (2m-8)_{m-8}\, A^m \,.\, 2(m-7)_2\, C^{m-9}\, D\, [H] \,.\, B^{-2m+7}$

38) $\overset{9}{\mathfrak{M}}_{VII} = + \frac{1}{m-8} (2m-9)_{m-9}\, A^m \,.\, 3(m-8)_3\, C^{m-11}\, D^2\, [H] \,.\, B^{-2m+8}$

u. s. w.

39) $\overset{p}{\mathfrak{M}}_{VII} = (-1)^{p-1} \,.\, \frac{1}{m-p+1} (2m-p)_{m-p}\, A^m\, (p-6)(m-p+1)_{p-6}\, C^{m-2p+7}\, D^{p-7}\, [H] \,.\, B^{-2m+p-1}$

---

40) $\overset{8}{\mathfrak{M}}_{VIII} = - \frac{1}{m-7} (2m-8)_{m-8}\, A^m \,.\, 3_3(m-7)_3\, C^{m-10}\, D^0\, [E^3] \,.\, B^{-2m+7}$

41) $\overset{9}{\mathfrak{M}}_{VIII} = + \frac{1}{m-8} (2m-9)_{m-9}\, A^m \,.\, 4_3(m-8)_4\, C^{m-12}\, D\, [E^3] \,.\, B^{-2m+8}$

42) $\overset{10}{\mathfrak{M}}_{VIII} = - \frac{1}{m-9} (2m-10)_{m-10}\, A^m \,.\, 5_3(m-9)_5\, C^{m-14}\, D^2\, [E^3] \,.\, B^{-2m+9}$

u. s. w.

43) $\overset{p}{\mathfrak{M}}_{VIII} = (-1)^{p-1} \,.\, \frac{1}{m-p+1} (2m-p)_{m-p}\, A^m\, (p-5)_3(m-p+1)_{p-5}\, C^{m-2p+6}\, D^{p-8}\, [E^3] \,.\, B^{-2m+p-1}$

---

u. s. w. u. s. w.

105. Aus diesen abgeleiteten allgemeinen Gliedern $\left(\overset{p}{\mathfrak{M}}_q\right)$ der correspondirenden Reihen ergiebt sich, daß einige ihrer Coefficienten und Faktoren beständig sind, andere sich ändern, sowie daß jedes allgemeine Glied einen besonderen, nicht mit den Größen m und p behafteten, (hier eingeklammerten) Faktor hat. Es läßt sich daher aus denselben noch allgemeiner weiter ableiten:

$$\overset{p}{\mathfrak{M}}_q = (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{m-p+1} (2m-p)_{m-p} A^m (p-\delta)_\alpha (m-p+1)_{p-\delta} C^{m-2p+\gamma} D^{p-\beta} [\mathfrak{Y}] \cdot B^{-2m+p-1}$$

in welcher Darstellung die Buchstaben α, β, γ, δ, $\mathfrak{Y}$ noch näher zu bestimmende Größen bezeichnen.

106. Wenn man nun die Umkehrung der Reihe, noch weiter als bisher geschehen ist, fortsetzt, so ergiebt sich für den mit den Größen m und p nicht behafteten Faktor $[\mathfrak{Y}]$ dasselbe Bildungsgesetz, welches für den zusammengesetzten Faktor (6.), beziehungsweise das Polynomium (1.), stattfindet und man hat nur nöthig in (1.)

1 für A; 0 für B; E für C; F für D; G für E; H für F; u. s. w.

zu schreiben und dabei die Stellenzahl, beziehungsweise den Exponenten von x, um 2 zu vermehren, damit zugleich die für $\mathfrak{Y}$ nach und nach bestimmten Größen in Gruppen gehörig geschichtet werden. Daher wollen wir den Faktor $\mathfrak{Y}$ Polynomial-Faktor nennen und denselben, um ihn alsbald von den übrigen Faktoren zu unterscheiden, einklammern.

Demgemäß ergeben sich für $[\mathfrak{Y}]$ nach und nach die Werthe:

$$1,\ E,\ F,\ G,\ H,\ J,\ K,\ L,\ M,\ \ldots.$$
$$(E,\ F,\ G,\ H,\ J,\ K,\ L,\ M,\ \ldots.)^2$$
$$(E,\ F,\ G,\ H,\ J,\ K,\ L,\ M,\ \ldots.)^3$$
$$(E,\ F,\ G,\ H,\ J,\ K,\ L,\ M,\ \ldots.)^4$$

u. s. w.

welche wir zur deutlichen Uebersicht und zugleich geordnet nach den Hauptgruppen in nachstehendem Schema (109.) zusammenstellen.

107. In diesem Schema enthält die erste Horizontalspalte die Stellenzahlen der Hauptgruppen der Entwickelung und die unter denselben befindlichen, in den Vertikalspalten stehenden, Größen sind die, nicht mit den Größen m und p behafteten Polynomial-Faktoren der zuwachsenden allgemeinen Glieder der correspondirenden Reihen. Es läßt sich nun nach diesem Schema die Zahl der Vertikalreihen jeder Hauptgruppe (102.) weiter bestimmen.

Man erhält aus ihm

für die Hauptgruppe:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	..
die Zahl der Vertikalreihen des Zuwachses:	1	.	1	1	2	2	4	4	7	8	12	14	21	24	34	41	..
und hieraus die Zahl sämmtlicher Vertikalreihen:	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	..

wenn man jedesmal die Zahl der allgemeinen Glieder des Zuwachses zu der Zahl der Vertikalreihen der vorhergehenden Hauptgruppe addirt.

108. 1) Wenn man die Formel (105) mit den Formeln für p (104) in Bezug auf die Exponenten von D vergleicht, so findet sich, daß so oft p um eine Einheit zunimmt, dies auch mit den Exponenten von D der Fall ist und daß für diese Formeln $0 = p - \beta$ nämlich $p = \beta$ ist; d. h. β ist stets gleich dem Index des Polynomial-Faktors $[\mathfrak{Y}]$ und der kleinste Werth von p ist stets gleich β. Lassen wir daher p in β übergehen, so beziehen wir die betreffende Formel, anstatt auf alle Vertikalreihen correspondirender Reihen, nur auf deren erste Vertikalreihe.

2) Vergleicht man die Formel (105.) mit den Formeln (104.) in Bezug auf α, so findet sich, daß diese Größe jedesmal die Zahl der Faktoren von $\mathfrak{Y}$ (den etwaigen Zahlen-Coefficienten nicht mitgerechnet) ausdrückt. Durch weitere Vergleichung dieser und der auf dieselbe Weise noch weiter entwickelten Formeln findet sich ferner:

3) $\delta = \beta - \alpha$ und 4) $\gamma = \beta - \alpha + 1$

109. # Schema

zur

Bestimmung des Polynomial-Faktors [Y] der allgemeinen Glieder der Entwickelung.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	..	p
1	.	E	F	G	H	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	..	
				E^2	2EF	2EG	2EH	2EJ	2EK	2EL	2EM	2EN	2EO	2EP	2EQ	..	
						F^2	2FG	2FH	2FJ	2FK	2FL	2FM	2FN	2FO	2FP	..	
								G^2	2GH	2GJ	2GK	2GL	2GM	2GN	2GO	..	
										H^2	2HJ	2HK	2HL	2HM	2HN	..	
												J^2	2JK	2JL	2JM	..	
														K^2	2KL	..	
						E^3	$3E^2F$	$3E^2G$	$3E^2H$	$3E^2J$	$3E^2K$	$3E^2L$	$3E^2M$	$3E^2N$	$3E^2O$	..	
								$3EF^2$	2.3EFG	2.3EFH	2.3EFJ	2.3EFK	2.3EFL	2.3EFM	2.3EFN	..	
										$3EG^2$	2.3EGH	2.3EGJ	2.3EGK	2.3EGL	2.3EGM	..	
												$3EH^2$	2.3EHJ	2.3EHK	2.3EHL	..	
														$3EJ^2$	2.3EJK	..	
									F^3	$3F^2G$	$3F^2H$	$3F^2J$	$3F^2K$	$3F^2L$	$3F^2M$	..	
											$3FG^2$	2.3FGH	2.3FGJ	2.3FGK	2.3FGL	..	
													$3FH^2$	2.3FHJ	2.3FHK	..	
															$3FJ^2$	..	
												G^3	$3G^2H$	$3G^2J$	$3G^2K$	..	
														$3GH^2$	2.3GHJ	..	
															H^3	..	
								E^4	$4E^3F$	$4E^3G$	$4E^3H$	$4E^3J$	$4E^3K$	$4E^3L$	$4E^3M$	..	
										$4_2E^2F^2$	2.4_2E^2FG	2.4_2E^2FH	2.4_2E^2FJ	2.4_2E^2FK	2.4_2E^2FL	..	
												$4_2E^2G^2$	2.4_2E^2GH	2.4_2E^2GJ	2.4_2E^2GK	..	
														$4_2E^2H^2$	2.4_2E^2HJ	..	Y
											$4EF^3$	$3.4EF^2G$	$3.4EF^2H$	$3.4.EF^2J$	$3.4EF^2K$	..	
													$3.4EFG^2$	2.3.4EFGH	2.3.4EFGJ	..	
															$3.4EFH^2$	..	
														$4EG^3$	$3.4EG^2H$	..	
												F^4	$4F^3G$	$4F^3H$	$4F^3J$	..	
														$4_2F^2G^2$	2.4_2F^2GH	..	
															$4FG^3$	..	
										E^5	$5E^4F$	$5E^4G$	$5E^4H$	$5E^4J$	$5E^4K$	..	
												$5_2E^3F^2$	2.5_2E^3FG	2.5_2E^3FH	2.5_2E^3FJ	..	
														$5_2E^3G^2$	2.5_2E^3GH	..	
													$5_2E^2F^3$	$3.5_2E^2F^2G$	$3.5_2E^2F^2H$	..	
															$3.5_2E^2FG^2$	..	
														$5EF^4$	$4.5EF^3G$	..	
															F^5	..	
												E^6	$6E^5F$	$6E^5G$	$6E^5H$	..	
														$6_2E^4F^2$	2.6_2E^4FG	..	
															$6_3E^3F^3$	..	
														E^7	$7E^6F$	..	

110. Will man die Betrachtung (107.) weiter fortsetzen, so ist es nothwendig, das Schema (109.) selbst nach (106.) weiter zu entwickeln.

Es ergiebt sich noch aus (109.), schreibt man:

$$\overset{IV}{\mathfrak{C}} \text{ für } E, \quad \overset{V}{\mathfrak{C}} \text{ für } F; \quad \overset{VI}{\mathfrak{C}} \text{ für } G; \text{ u. s. w.} \quad \mathfrak{n} \text{ für } \overset{N}{\mathfrak{C}};$$

wo also selbstverständlich die Zahlen $^{IV}\ ^{V}\ ^{VI} \ldots ^{N}$ Stellenzeiger sind (die mit dem Werthe von β, für $\alpha = 1$, und mit dem bezüglichen Exponenten von x der gegebenen umzukehrenden Reihe (101. 1.) übereinstimmen), daß man für die Produkte der Coefficienten E, F, G, H, ... die Größe β erhält, wenn man jeden Stellenzeiger eines Buchstaben mit seinem Exponenten multiplicirt, diese Produkte addirt und von dieser Summe 2mal (die Summe der Exponenten weniger 1) abzieht.

So erhält man z. B., daß für das Produkt $E^2 F^3$ ($= \overset{IV}{\mathfrak{C}}{}^2 \overset{V}{\mathfrak{C}}{}^3$) die Größe

$$\beta = (2 . 4 + 3 . 5) - 2 [(2 + 3) - 1] = 15 \text{ ist.}$$

111. Hiernach erhält man in Bezug auf die reinen Potenzen der gegebenen Coefficienten E, F, G, H, ...

1) Die ersten Potenzen der verschiedenen Coefficienten E, F, G, H, ... beginnen mit derjenigen Hauptgruppe, deren Stellenzahl gleich dem Exponenten der zugehörigen Potenz von x ist.

2) Die Potenzen von E ($= \overset{IV}{\mathfrak{C}}$) überspringen stets eine Hauptgruppe.

Es beginnen also:	$E, E^2, E^3, E^4, \ldots$	E^α
mit der Hauptgruppe:	$4, 6, 8, 10, \ldots$	$2\alpha + 2 = \beta$

3) Die Potenzen von F ($= \overset{V}{\mathfrak{C}}$) überspringen stets zwei Hauptgruppen.

Es beginnen also:	$F, F^2, F^3, F^4, \ldots$	F^α
mit der Hauptgruppe:	$5, 8, 11, 14, \ldots$	$3\alpha + 2 = \beta$

4) Die Potenzen von G ($= \overset{VI}{\mathfrak{C}}$) überspringen stets drei Hauptgruppen.

Es beginnen also:	$G, G^2, G^3, G^4 \ldots$	G^α
mit der Hauptgruppe,	$6, 10, 14, 18 \ldots$	$4\alpha + 2 = \beta$

u. s. w.

5) Die Potenzen von $\overset{N}{\mathfrak{C}}$ ($= \mathfrak{n}$) überspringen stets n — 3 Hauptgruppen.

Es beginnt also:	$\overset{N}{\mathfrak{C}}{}^\alpha$
mit der Hauptgruppe:	$(n - 2)\alpha + 2 = \beta$

Hieraus folgt noch:

6) Für $\alpha = 0$ ist $\beta = 2$.

7) „ $\alpha = 1$ und $n = 3$ ist $\beta = 3$.

112. Es geht aus dem Bisherigen hervor, daß jedes Glied der Entwickelung vollkommen bestimmt ist, wenn man den Exponenten m von A, das ist die Zahl der Horizontalreihe, sowie die Stellenzahl p der Hauptgruppen, welche das fragliche Glied in der Entwickelung einnimmt, und außerdem seinen Polynomial-Faktor [$\mathfrak{Y}$] kennt, und wir wollen daher in Zukunft den allgemeinen Werth jeden Gliedes durch diese drei Größen bezeichnen.

Schreiben wir demgemäß

1) $$\overset{p}{m}[\mathfrak{Y}] \text{ anstatt } \overset{p}{\mathfrak{M}}q,$$

so ist die allgemeine Form der correspondirenden Reihen

2) $$\overset{\beta}{m}[\mathfrak{Y}]; \quad \overset{\beta+1}{m}[\mathfrak{Y}]; \quad \overset{\beta+2}{m}[\mathfrak{Y}]; \ldots \quad \overset{p}{m}[\mathfrak{Y}]; \quad \overset{p+1}{m}[\mathfrak{Y}]; \quad \overset{p+2}{m}[\mathfrak{Y}]; \ldots$$

und substituiren wir für δ und γ ihre (108.) gefundenen Werthe in (105.); so geht diese Formel über in:

3) $$\overset{p}{m}[\mathfrak{Y}] = (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{m-p+1} (2m-p)_{m-p} A^m (p - \beta + \alpha)_\alpha \cdot (m - p + 1)_{p-\beta+\alpha} C^{m-2p+\beta-\alpha+1}$$
$$. D^{p-\beta} [\mathfrak{Y}] . B^{-2m+p-1}$$

welche Formel wir als das ganz allgemeine Glied aller Vertikalreihen der Umkehrung betrachten können und in welcher α und β von der Größe $[\mathfrak{Y}]$ abhängige Größen sind.

Da wir später das ganz allgemeine Glied mit seinem folgenden Gliede vergleichen werden, so wollen wir Letzteres aus demselben ableiten. Schreiben wir in obiger Formel m + 1 für m, so erhalten wir das folgende Glied der vertikalen Richtung, nämlich:

$$4)\quad \overset{p}{\widetilde{m+1}}\,[\mathfrak{Y}] = (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{m-p+2}\,(2m-p+2)_{m-p+1}\,A^{m+1}\,(p-\beta+\alpha)_{\alpha}(m-p+2)_{p-\beta+\alpha}$$
$$\cdot\, C^{m-2p+\beta-\alpha+2}\,D^{p-\beta}[\mathfrak{Y}]\,.\,B^{-2m+p-3},$$

dieses folgende Glied ausgedrückt durch die Zahl der Horizontalreihe des vorhergehenden.

Schreiben wir aber in Formel 3) p + 1 für p, so erhalten wir das folgende Glied der horizontalen Richtung, nämlich:

$$5)\quad \overset{p+1}{m}\,[\mathfrak{Y}] = (-1)^{p} \cdot \frac{1}{m-p}\,(2m-p-1)_{m-p-1}\,A^{m}\,(p-\beta+\alpha+1)_{\alpha}(m-p)_{p-\beta+\alpha+1}\,C^{m-2p+\beta-\alpha-1}$$
$$.\,D^{p-\beta+1}\,[\mathfrak{Y}]\,.\,B^{-2m+p}$$

dieses folgende Glied ausgedrückt durch die Stellenzahl der Hauptgruppe des vorhergehenden.

113. Nach Formel (112. 3.) lassen sich nunmehr die allgemeinen Glieder der correspondirenden Reihen, ohne vorher die allgemeinen Glieder der betreffenden Vertikalreihen zu kennen, mit Hülfe des Schemas (109.) leicht fortsetzen.

So folgt auf den Polynomial-Faktor E^3 (104.) in der Vertikalspalte 8 (109.) aufwärts der Polynomial-Faktor F^2. Für denselben ist also (108.)

$\alpha = 2$ und $\beta = 8$ daher:

$$1)\quad \overset{p}{\mathfrak{M}}_{IX} = \overset{p}{m}\,[F^2] = (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{m-p+1}\,(2m-p)_{m-p}\,A^{m}\,(p-6)_2\,(m-p+1)_{p-6}\,C^{m-2p+7}\,D^{p-8}\,[F^2]\,.\,B^{-2m+p-1}$$

Ferner folgen noch in dieser Rubrik 8 (109.) die Polynomial-Faktoren:

$\left.\begin{matrix}2EG\\ J\end{matrix}\right\}$, für sie ist $\left\{\begin{matrix}\alpha = 2\\ \alpha = 1\end{matrix}\right.$ und $\beta = 8$, daher

$$2)\quad \overset{p}{\mathfrak{M}}_{X} = \overset{p}{m}\,[2EG] = (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{m-p+1}\,(2m-p)_{m-p}\,A^{m}\,(p-6)_2(m-p+1)_{p-6}\,C^{m-2p+7}\,D^{p-8}\,[2EG]\,.\,B^{-2m+p-1}$$

$$3)\quad \overset{p}{\mathfrak{M}}_{XI} = \overset{p}{m}[J] = (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{m-p+1}\,(2m-p)_{m-p}\,A^{m}\,.\,(p-7)(m-p+1)_{p-7}\,C^{m-2p+8}\,D^{p-8}\,[J]\,.\,B^{-2m+p-1}$$

Alsdann folgen im Schema (109.), Vertikalspalte 9, von unten der Ordnung nach die Faktoren:

$\left.\begin{matrix}3E^2F\\ 2FG\\ 2EH\\ K\end{matrix}\right\}$, für sie ist $\alpha = \left\{\begin{matrix}3\\ 2\\ 2\\ 1\end{matrix}\right.$ und $\beta = 9$, daher:

$$4)\quad \overset{p}{\mathfrak{M}}_{XII} = \overset{p}{m}[3E^2F] = (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{m-p+1}\,(2m-p)_{m-p}\,A^{m}\,(p-6)_3(m-p+1)_{p-6}\,C^{m-2p+7}\,D^{p-9}\,[3E^2F]\,.\,B^{-2m+p-1}$$

$$5)\quad \overset{p}{\mathfrak{M}}_{XIII} = \overset{p}{m}[2FG] = (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{m-p+1}\,(2m-p)_{m-p}\,A^{m}\,(p-7)_2(m-p+1)_{p-7}\,C^{m-2p+8}\,D^{p-9}\,[2FG]\,.\,B^{-2m+p-1}$$

$$6)\quad \overset{p}{\mathfrak{M}}_{XIV} = \overset{p}{m}\,[2EH] = (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{m-p+1}\,(2m-p)_{m-p}\,A^{m}\,(p-7)_2(m-p+1)_{p-7}\,C^{m-2p+8}\,D^{p-9}\,[2EH]\,.\,B^{-2m+p-1}$$

$$7)\quad \overset{p}{\mathfrak{M}}_{XV} = \overset{p}{m}\,[K] = (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{m-p+1}\,(2m-p)_{m-p}\,A^{m}\,(p-8)\,(m-p+1)_{p-8}\,C^{m-2p+9}\,D^{p-9}\,[K]\,.\,B^{-2m+p-1}$$

u. s. w.

114. Noch ist für die entwickelten Vertikalreihen (101. 2) Folgendes zu bemerken:

1) Bei allen correspondirenden Reihen folgt auf das dritte Glied jeder vorhergehenden Vertikalreihe das erste Glied der folgenden Vertikalreihe horizontal.

2) Da, je nach dem Grade der umzukehrenden Reihe, nämlich dem Grade der vorgelegten Gleichung, Vertikalreihen verschwinden; so könnte man diese auch nach den Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x in Klassen eintheilen.

Ist die Gleichung vom ersten Grade, so verschwinden alle Vertikalreihen und es bleibt nur das einzige Glied der ersten Hauptgruppe

$$x = - AB^{-1}.$$

Ist sie vom zweiten Grade, so verschwinden alle Vertikalreihen mit Ausnahme der einzigen der zweiten Hauptgruppe, um deren Werth das einzige Glied der ersten Hauptgruppe zu vermehren ist.

Wir können daher die Reihe, deren allgemeines Glied $\overset{2}{\mathfrak{M}}_1$ (104. 1.) ist (wofür wir nach (112. 1.) $\overset{2}{m}[1]$ schreiben), die Vertikalreihe des zweiten Grades nennen.

Ist die vorgelegte Gleichung vom dritten Grade, so verschwinden alle Vertikalreihen mit Ausnahme der ersten Vertikalreihe einer jeden Hauptgruppe und wir können daher die Reihen, deren allgemeines Glied $\overset{p}{\mathfrak{M}}_1$ ($= \overset{p}{m}[1]$) ist, die correspondirenden Reihen des dritten Grades nennen. Um diese Bezeichnung aber in Einklang mit der vorhergehenden zu bringen, müssen wir noch annehmen, daß für die correspondirenden Reihen des dritten Grades, welche den beiden ersten Hauptgruppen zur Bestimmung von x noch zuzufügen sind, p nicht kleiner sein könne als 3, daß mithin das allgemeine Glied der ersten Vertikalreihe der correspondirenden Reihen des dritten Grades $\overset{3}{\mathfrak{M}}_1 = \overset{3}{m}[1]$ sei.

Ist die vorgelegte Gleichung vom vierten Grade, so verschwinden alle Vertikalreihen mit Ausnahme des ersten Gliedes der Entwickelung, der Vertikalreihe des zweiten Grades, der correspondirenden Reihen des dritten Grades und derjenigen correspondirenden Reihen, deren allgemeine Glieder den Polynomial-Faktor E, E^2, E^3, E^4, . . . haben und welche wir correspondirende Reihen des vierten Grades nennen wollen und zwar wollen wir diejenigen in E, erster Klasse, diejenigen in E^2 zweiter Klasse, diejenigen in E^3, dritter Klasse u. s. w. heißen. Diese Betrachtung kann man mit allen übrigen Coefficienten fortsetzen, wo dann die Zahl der Klasse jedesmal mit dem Werthe von α übereinstimmt und es ergeben sich daher die correspondirenden Reihen, deren allgemeine Glieder den Polynomial-Faktor F, G, H, J, ... haben, als solche der ersten Klasse des 5ten, 6ten, 7ten, 8ten u. s. w. Grades.

3) Bei correspondirenden Reihen des nten Grades ist stets der kleinste Werth, welchen man p beilegen kann, gleich n und zwar für die erste Vertikalreihe der ersten Klasse (108. 1.)

4) In jeder folgenden Hauptgruppe, von der dritten an gerechnet, beginnen neue correspondirende Reihen, welche durch sämmtliche Hauptgruppen ohne Ende fortlaufen. Die Zahl des Zuwachses dieser correspondirenden Reihen wächst mit der Zahl der Hauptgruppen in vermehrtem Verhältniß.

5) Es ist sowohl für die Vertikalreihe des 2. Grades, als auch für die correspondirenden Reihen des 3. Grades stets $\beta - \alpha = 2$ [folgt aus 111. 6. und 7.], wodurch beide im Zusammenhange mit einander stehen und unter ein und dasselbe allgemeine Glied (104. 7.) subsumiren.

6) Würde man demgemäß die Vertikalreihe des 2. Grades als die erste Vertikalreihe der correspondirenden Reihen des 3. Grades betrachten, so würde das einzige Glied der ersten Hauptgruppe das erste Glied der Vertikalreihe des 2. Grades bilden.

115. Wir haben bisher den Werth des allgemeinen Gliedes $\overset{p}{\mathfrak{M}}_q = \overset{p}{m}\,[\mathfrak{Y}]$ durch den Exponenten m des Faktors A, nämlich durch die Zahl m der entwickelten Horizontalreihen ausgedrückt und es ist klar, daß für diese Ausdrucksweise die Zahl m nicht mit der Gliederzahl der Vertikalreihen übereinstimmt, weil keine der Letzteren mit einem, den Faktor A in der ersten Potenz enthaltenden, Gliede anfängt. Um das allgemeine Glied auch mit der Gliederzahl jeder Vertikalreihe in Einklang zu bringen, sei m' der Exponent von A, mit welchem Faktor das erste Glied einer Vertikalreihe beginne, so läßt sich hieran leicht folgende Betrachtung knüpfen:

Die Vertikalreihen, deren allgemeine Glieder sind:

	$\overset{3}{m}[1]$;	$\overset{4}{m}[1]$;	$\overset{5}{m}[1]$;	$\overset{6}{m}[1]$;	$\overset{p}{m}[1]$; . . . .
beginnen mit der Horizontalreihe	3;	5;	7;	9; daher:	$2p - 3$

Hieraus ergibt sich: 1) $m' = 2p - 3 = 2p - 2 + 0 - 1 = 2p - 3 + 1 - 1$

In gleicher Weise findet sich für die Vertikalreihen, deren allgemeine Glieder sind:

$$\overset{p}{m}\,[E] \qquad m' = 2p - 4 = 2p - 4 + 1 - 1$$

$$\overset{p}{m}\,[F] \qquad m' = 2p - 5 = 2p - 5 + 1 - 1$$

$$\overset{p}{m}\,[G] \qquad m' = 2p - 6 = 2p - 6 + 1 - 1$$

$$\overset{p}{m}\,[E^2] \qquad m' = 2p - 5 = 2p - 6 + 2 - 1$$

$$\overset{p}{m}\,[2EF] \qquad m' = 2p - 6 = 2p - 7 + 2 - 1$$

$$\overset{p}{m}\,[2EG] \qquad m' = 2p - 7 = 2p - 8 + 2 - 1$$

$$\overset{p}{m}\,[E^3] \qquad m' = 2p - 6 = 2p - 8 + 3 - 1$$

u. s. w.

und allgemein $\overset{p}{m}\,[\mathfrak{Y}]$

$$2) \quad m' = 2p - \beta + \alpha - 1$$

Es sei nun μ die Gliederzahl des allgemeinen Gliedes jeder Vertikalreihe, so ist:

$$\mu = m - m' + 1$$

daher

$$3) \quad \mu = m - 2p + \beta - \alpha + 2$$

und

$$4) \quad m = \mu + 2p - \beta + \alpha - 2$$

Ebenso ließe sich die Stellenzahl jeder Vertikalreihe einer correspondirenden Reihe durch die Stellenzahl p der Hauptgruppen ausdrücken.

Nach (108. 1.) ist β der kleinste Werth von p; dieser Größe entsprechen daher nach und nach die Werthe:

$$\beta,\ \beta + 1,\ \beta + 2,\ \beta + 3, \text{ u. s. w.}$$

Bezeichnet daher π die Stellenzahl einer Vertikalreihe, welche sie in der correspondirenden Reihe einnimmt, so ist

$$5) \quad p = \beta + \pi - 1$$

und

$$6) \quad \pi = p - \beta + 1$$

116. Substituirt man weiter den so erhaltenen Werth von m (115. 4.) in die Formel (112. 3.); so erhält man das ganz allgemeine Glied aller Vertikalreihen, ausgedrückt durch die Stellenzahl μ der Glieder, nämlich:

$$1) \quad \overbrace{\mu+2p-\beta+\alpha-2}^{p}[\mathfrak{Y}] = (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{\mu + p - \beta + \alpha - 1} (2\mu + 3p - 2\beta + 2\alpha - 4)_{\mu+p-\beta+\alpha-2} \cdot$$
$$\cdot\, A^{\mu+2p-\beta+\alpha-2} (p - \beta + \alpha)_{\alpha} (\mu + p - \beta + \alpha - 1)_{\mu-1}\, C^{\mu-1}\, D^{p-\beta}\, [\mathfrak{Y}] \cdot B^{-2\mu-3p+2\beta-2\alpha+3}$$

Setzt man in dieser Formel für μ nach und nach: 1, 2, 3, . . . so ergiebt sich:

$$2) \quad \overbrace{1+2p-\beta+\alpha-2}^{p}[\mathfrak{Y}] = (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{p-\beta+\alpha} (3p - 2\beta + 2\alpha - 2)_{p-\beta+\alpha-1}\, A^{2p-\beta+\alpha-1} \cdot$$
$$\cdot\, (p - \beta + \alpha)_{\alpha}\, D^{p-\beta}\, [\mathfrak{Y}] \cdot B^{-3p+2\beta-2\alpha+1}$$

$$3) \quad \overbrace{2+2p-\beta+\alpha-2}^{p}[\mathfrak{Y}] = (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{p - \beta + \alpha + 1} (3p - 2\beta + 2\alpha)_{p-\beta+\alpha}\, A^{2p-\beta+\alpha} \cdot$$
$$\cdot\, (p - \beta + \alpha)_{\alpha} (p - \beta + \alpha + 1) \cdot C\, D^{p-\beta}\, [\mathfrak{Y}] \cdot B^{-3p+2\beta-2\alpha-1}$$

$$4) \quad \overbrace{3+2p-\beta+\alpha-2}^{p}[\mathfrak{Y}] = (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{p - \beta + \alpha + 2} (3p - 2\beta + 2\alpha + 2)_{p-\beta+\alpha+1}\, A^{2p-\beta+\alpha+1} \cdot$$
$$\cdot\, (p - \beta + \alpha)_{\alpha} (p - \beta + \alpha + 2)_2 \cdot C^2\, D^{p-\beta}\, [\mathfrak{Y}] \cdot B^{-3p+2\beta-2\alpha-}$$

u. s. w.

welche Ausdrücke allgemein das erste, zweite, dritte u. s. w. Glied einer jeden Vertikalreihe, ausgedrückt durch die Stellenzahl der Hauptgruppen, bezeichnen.

Um den allgemeinen Ausdruck der folgenden Vertikalreihe dieser correspondirenden Reihen zu erhalten, haben wir nöthig $p + 1$ für p in Formel 1) zu schreiben. Man erhält:

$$5)\quad \overbrace{\mu+2p-\beta+\alpha}^{p+1}[\mathfrak{Y}] = (-1)^p \cdot \frac{1}{\mu+p-\beta+\alpha}(2\mu+3p-2\beta+2\alpha-1)_{\mu+p-\beta+\alpha-1}\, A^{\mu+2p-\beta+\alpha} \,. \\ .\,(p-\beta+\alpha+1)_\alpha\,(\mu+p-\beta+\alpha)_{\mu-1} \cdot C^{\mu-1}\, D^{p-\beta+1}\,[\mathfrak{Y}] \,.\, B^{-2\mu-3p+2\beta-2\alpha}$$

Setzt man in dieser Formel $\mu = 1$, so ergibt sich der allgemeine Ausdruck für das erste Glied der folgenden Vertikalreihe

$$6)\quad \overbrace{1+2p-\beta+\alpha}^{p+1}[\mathfrak{Y}] = (-1)^p \cdot \frac{1}{p-\beta+\alpha+1}(3p-2\beta+2\alpha+1)_{p-\beta+\alpha}\, A^{2p-\beta+\alpha+1}\,(p-\beta+\alpha+1)_\alpha \,. \\ .\, D^{p-\beta+1}\,[\mathfrak{Y}] \,.\, B^{-3p+2\beta-2\alpha-2}$$

Schreibt man in (112. 5.) für m seinen Werth aus (115. 4.) oder schreibt man in (116. 1.) $\mu - 2$ für μ und $p + 1$ für p, so erhält man in Bezug auf die Formel (116. 1.) das folgende Glied der folgenden Vertikalreihe in horizontaler Richtung, nämlich:

$$7)\quad \overbrace{(\mu-2)+2p-\beta+\alpha}^{p+1}[\mathfrak{Y}] = (-1)^p \cdot \frac{1}{\mu+p-\beta+\alpha-2}(2\mu+3p-2\beta+2\alpha-5)_{\mu+p-\beta+\alpha-3} \cdot A^{\mu+2p-\beta+\alpha-2} \,. \\ .\,(p-\beta+\alpha+1)_\alpha\,(\mu+p-\beta+\alpha-2)_{\mu-3}\, C^{\mu-3}\, D^{p-\beta+1}\,[\mathfrak{Y}] \,.\, B^{-2\mu-3p+2\beta-2\alpha+4}.$$

117. Die Formeln (116. 2. und 6.) werden uns später dazu dienen, das erste Glied irgend einer Vertikalreihe einer correspondirenden Reihe mit dem ersten Gliede der folgenden Vertikalreihe zu vergleichen. Wir werden aber auch nöthig haben, das erste Glied einer Vertikalreihe irgend einer Hauptgruppe mit dem ersten Gliede einer Vertikalreihe irgend einer folgenden Hauptgruppe zu vergleichen, ohne daß beide Vertikalreihen denselben correspondirenden Reihen angehören. Zur Bestimmung der hierzu nöthigen Formeln bezeichne $[\mathfrak{Z}]$ einen in einer folgenden Vertikalspalte (109.) enthaltenen Polynomial-Faktor, wenn $[\mathfrak{Y}]$ einen in einer vorhergehenden Vertikalspalte enthaltenen Polynomial-Factor ausdrückt; so ist klar, daß, je nach dem Werthe von $[\mathfrak{Z}]$ in Bezug auf $[\mathfrak{Y}]$, die Größe β übergeht in $\beta + 1$, $\beta + 2$, $\beta + 3$, u. s. w. α aber hierbei ungeändert bleibt oder auch übergeht in $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, u. s. w.

Schreibt man nun $[\mathfrak{Z}]$ für $[\mathfrak{Y}]$ und geht

1) β in $\beta + 1$ über, während α ungeändert bleibt, so ergiebt sich aus (116. 6.):

$$\overbrace{1+2p-\beta+\alpha-1}^{p+1}[\mathfrak{Z}] = (-1)^p \cdot \frac{1}{p-\beta+\alpha}(3p-2\beta+2\alpha-1)_{p-\beta+\alpha-1}\, A^{2p-\beta+\alpha}\,(p-\beta+\alpha)_\alpha\, D^{p-\beta} \,. \\ .\,[\mathfrak{Z}] \,.\, B^{-3p+2\beta-2\alpha}$$

2) Geht aber β in $\beta + 2$ über und α in $\alpha + 1$, so ergiebt sich aus (116. 6.):

$$\overbrace{1+2p-\beta+\alpha-1}^{p+1}[\mathfrak{Z}] = (-1)^p \cdot \frac{1}{p-\beta+\alpha}(3p-2\beta+2\alpha-1)_{p-\beta+\alpha-1}\, A^{2p-\beta+\alpha} \,.\, (p-\beta+\alpha)_{\alpha+1} \,. \\ .\, D^{p-\beta-1} \,.\, [\mathfrak{Z}] \,.\, B^{-3p+2\beta-2\alpha}$$

118. Es geht aus den bisher entwickelten allgemeinen Gliedern hervor, daß sich wohl für kleinere numerische Werthe von p und m die betreffenden numerischen Glieder leicht bestimmen lassen. Werden aber die Werthe von p und m einigermaßen groß, so erschwert sich die numerische Ausrechnung, der vielen Faktoren der Coefficienten wegen, fast bis zur Unmöglichkeit der Ausführung. Diese Unmöglichkeit ergibt sich unzweifelhaft für sehr große Werthe von p und m.

Um daher doch die Natur der entwickelten Reihen auch für sehr große Werthe von p und m kennen zu lernen, ist es nothwendig, die Quotienten der verschiedenen Glieder der verschiedenen Reihen in Betrachtung zu ziehen, sowie die Bedingungen kennen zu lernen, unter welchen Convergenz der entwickelten Vertikalreihen stattfindet. Da sich aber diese Bedingungen am besten aus den Summenformeln dieser Reihen ergeben, so wollen wir nunmehr das Summiren der (101. 2.) entwickelten Reihen vornehmen und wir wollen hierzu einen elementaren Weg einschlagen.

Summirung der Vertikalreihen.

---

119. Wir haben in der ersten Abtheilung dieser Abhandlung zur Bestimmung der reellen Wurzeln einer vorgelegten Gleichung stets nur die vorderen Glieder der ersteren Vertikalreihen in Anwendung gebracht und waren hierbei, wie die vorgelegten Beispiele nachweisen, manchmal genöthigt, um mit möglichst wenigen Gliedern zur Bestimmung der Wurzeln auszureichen, mehrere Transformirungen der Gleichungen vorzunehmen, beziehungsweise die Wurzeln auf 1 bis 2 Decimalstellen annähernd zu bestimmen, bevor wir von der Umkehrungsformel Gebrauch machten. Zu dieser Unbequemlichkeit gesellte sich die Unbestimmtheit, bis zu welcher Stelle genau die angegebenen Formeln die Wurzelwerthe liefern, sowie die Ungewißheit, ob nicht spätere Glieder doch wieder einen beträchtlichen Werth erhielten, durch deren Vernachlässigung Fehler in das gefundene Resultat übergegangen seien. Diese Inconvenienz läßt sich zwar in der Anwendung dadurch beseitigen, daß man die gefundene Wurzel durch Substituirung einer Probe unterwirft — nichts desto weniger bleibt es aber wünschenswerth, das Verhalten aller nachfolgenden Glieder schon aus den Coefficienten der gegebenen oder transformirten Gleichung zu beurtheilen und nachzuweisen.

Dieser Nachweis läßt sich auf die Summenformeln der Vertikalreihen gründen, durch welche wir zugleich Formeln erhalten, welche selbstredend ein weniger oftes Transformiren erheischen; dem Geschäft des Summirens selbst sollen einige Hülfsformeln vorausgeschickt werden.

I. Hülfsformeln zur Summirung der Vertikalreihen.

120. Schreibt man in dem allgemeinen Binomial-Coefficienten n_m (1. Anm.) $\frac{1}{k}$ für n, so ist

$$\left(\frac{1}{k}\right)_m = \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\left(\frac{1}{k}-2\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{k}-m+3\right)\left(\frac{1}{k}-m+2\right)\left(\frac{1}{k}-m+1\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\cdots\cdots(m-2)\,.\,(m-1)\,.\,m}$$

$$= (-1)^{m-1}\cdot\frac{\left(m-\frac{k+1}{k}\right)\left(m-\frac{2k+1}{k}\right)\left(m-\frac{3k+1}{k}\right)\cdots\left(2-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{1}{k}}{1\,.\,2\,.\,3\,\cdots(m-2)\,.\,(m-1)\,.\,m}$$

[Die Faktoren des Zählers verkehrt geschrieben und jeden, den ersten ausgenommen, mit — 1 multiplicirt oder dividirt] also:

1) $\left(\frac{1}{k}\right)_m = (-1)^{m-1}\cdot\frac{1}{m}\left(m-\frac{k+1}{k}\right)_{m-1}\cdot\frac{1}{k}$. Für k = 2 ist:

2) $\left(\frac{1}{2}\right)_m = (-1)^{m-1}\cdot\frac{1}{m}\left(m-\frac{3}{2}\right)_{m-1}\cdot\frac{1}{2}$. Für k = — 2 ist:

3) $\left(-\frac{1}{2}\right)_m = (-1)^{m}\cdot\frac{1}{m}\left(m-\frac{1}{2}\right)_{m-1}\cdot\frac{1}{2}$.

121. Nun ist:

$$\frac{1}{m}\left(m-\tfrac{3}{2}\right)_{m-1}\cdot\tfrac{1}{2} = \frac{1}{m}\cdot\frac{(m-{}^3\!/_2)(m-{}^5\!/_2)(m-{}^7\!/_2)\ldots\ldots{}^5\!/_2\,.\,{}^3\!/_2\,.\,{}^1\!/_2}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots(m-3)(m-2)(m-1)}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{m}\cdot\frac{(2m-3)(2m-5)(2m-7)\ldots\ldots5\,.\,3\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots(m-3)(m-2)(m-1)}\cdot\frac{1}{2\,.\,2^{m-1}}$$

$$= \frac{1}{m}\cdot\frac{(2m-2)(2m-3)(2m-4)(2m-5)(2m-6)\ldots\ldots\ldots\ldots5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}{(2m-2)\,.\,1\,.\,(2m-4)\,.\,2\,.\,(2m-6)\ldots\ldots\ldots\ldots(m-3)\,4\,(m-2)\,2\,(m-1)}\cdot\frac{1}{2^m}$$

$$= \frac{1}{m}\cdot\frac{(2m-2)(2m-3)\ldots\ldots(m+1)\;m}{1\,.\,2\,\ldots\ldots(m-2)(m-1)}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{(m-1)(m-2)\ldots\ldots3\,.\,2\,.\,1}{2\,.\,4\,\ldots\ldots(2m-6)(2m-4)(2m-2)}$$

$$= \frac{1}{m-1}\cdot(2m-2)_{m-2}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{(m-1)(m-2)\ldots\ldots3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,\ldots\ldots(m-3)(m-2)(m-1)}\cdot\frac{1}{2^{m-1}}$$

$$= \frac{1}{m-1}\cdot(2m-2)_{m-2}\cdot\frac{1}{2^{2m-1}}.$$

Hieraus und aus (120. 2.) folgt:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)_m \cdot 2^{2m-1} = (-1)^{m-1} \cdot \frac{1}{m-1}(2m-2)_{m-2}$ ‖ 2) $\left(\frac{1}{2}\right)_m \cdot 4^m \cdot \frac{1}{2} = (-1)^{m-1} \cdot \frac{1}{m-1}(2m-2)_{m-2}$

122. Nun ist (121. 1.):

$$\frac{1}{m-1}(2m-2)_{m-2} = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{(2m-2)(2m-3)(2m-4)\ldots(m+3)(m+2)(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-4)(m-3)(m-2)}$$
$$= \frac{1}{m-1} \cdot \frac{2m-2}{m-2}(2m-3)_{m-3} = \frac{1}{m-2}(2m-3)_{m-3} \cdot 2$$

Hieraus und aus (121. 1.) folgt:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)_m \cdot 2^{2m-2} = (-1)^{m-1} \cdot \frac{1}{m-2}(2m-3)_{m-3}$ ‖ 2) $\left(\frac{1}{2}\right)_m \cdot 4^m \cdot \frac{1}{4} = (-1)^{m-1} \cdot \frac{1}{m-2}(2m-3)_{m-3}$

123. Es ist (120. 3.):

$$\frac{1}{m}(m-\tfrac{1}{2})_{m-1} \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})\ldots\ldots \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (m-3)(m-2)(m-1)} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\ldots\ldots 7 \cdot 5 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (m-3)(m-2)(m-1)} \cdot \frac{1}{2^m}$$
$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)(2m-5)\ldots\ldots 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2m \cdot 1 \cdot (2m-2) \cdot 2 \cdot (2m-4) \cdot 3 \ldots\ldots (m-3)\,6\,(m-2)\,4\,(m-1)} \cdot \frac{1}{2^m}$$
$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots(m+3)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-2)(m-1)} \cdot \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)\ldots 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \ldots (2m-4)(2m-2)2m} \cdot \frac{1}{2^m}$$
$$= \frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots(m+3)(m+2)(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-2)(m-1)\,m} \cdot \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2m-4)(2m-2) \cdot 2m} \cdot \frac{1}{2^{m+1}}$$
$$= (2m)_m \cdot \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (m-2)(m-1) \cdot m} \cdot \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \frac{1}{2^{m+1}} = (2m)_m \cdot \frac{1}{2^{2m}}$$

Hieraus und aus (120. 3.) folgt:

1) $\left(-\frac{1}{2}\right)_m = (-1)^m \cdot (2m)_m \cdot \frac{1}{2^{2m}}$ ‖ 2) $(-1)^m\left(-\frac{1}{2}\right)_m \cdot 4^m = (2m)_m$

124. Wenn man die entwickelten Glieder der verschiedenen Potenzen von $a+b$ der Ordnung nach mit m, $m+1$, $m+2$, $m+3$ u. s. w. multiplicirt, so ergibt sich:

1) $m\,a + (m+1)b = (a+b)^0(m\,a + (m+1)b)$

2) $m\,a^2 + (m+1) \cdot 2ab + (m+2)b^2 = (a+b)(m\,a + (m+2)b)$

3) $m\,a^3 + (m+1) \cdot 3a^2b + (m+2) \cdot 3ab^2 + (m+3)b^3 = (a+b)^2(m\,a + (m+3)b)$

4) $m\,a^4 + (m+1) \cdot 4a^3b + (m+2) \cdot 6a^2b^2 + (m+3) \cdot 4ab^3 + (m+4)\,b^4 = (a+b)^3(m\,a + (m+4)b)$

u. s. w., daher allgemein:

5) $m\,a^n + (m+1) \cdot na^{n-1}b + (m+2) \cdot n_2a^{n-2}b^2 + (m+3) \cdot n_3a^{n-3}b^3 + \ldots = (a+b)^{n-1}(m\,a + (m+n)b)$.

125. Multiplicirt man die entwickelten Glieder der verschiedenen Potenzen von $a+b$ der Ordnung nach mit m_2, $(m+1)_2$, $(m+2)_2$, $(m+3)_2$ u. s. w., so ergibt sich:

1) $m_2a + (m+1)_2b = (a+b)^0\left[m_2a + (m+1) \cdot \frac{m}{2} \cdot b\right] + 1_2(a+b)^{-1}b^2$

2) $m_2a^2 + (m+1)_2 \cdot 2ab + (m+2)_2 \cdot b^2 = (a+b)\left[m_2a + (m+3) \cdot \frac{m}{2} \cdot b\right] + 2_2(a+b)^0b^2$

3) $m_2a^3 + (m+1)_2 \cdot 3a^2b + (m+2)_2 \cdot 3ab^2 + (m+3)_2 \cdot b^3 = (a+b)^2\left[m_2a + (m+5) \cdot \frac{m}{2} \cdot b\right] + 3_2(a+b)^1b^2$

4) $m_2a^4 + (m+1)_2 \cdot 4a^3b + (m+2)_2 \cdot 6a^2b^2 + (m+3)_2 \cdot 4ab^3 + (m+4)_2b^4 = (a+b)^3\left[m_2a + (m+7) \cdot \frac{m}{2} \cdot b\right] + 4_2(a+b)^2b^2$

u. s. w., daher allgemein:

5) $m_2a^n + (m+1)_2na^{n-1}b + (m+2)_2 \cdot n_2a^{n-2}b^2 + (m+3)_2n_3a^{n-3}b^3 + \ldots = (a+b)^{n-1}\left[m_2a + (m+2n-1)\frac{m}{2} \cdot b\right] + n_2(a+b)^{n-2} \cdot b^2$

126. Auf gleiche Weise findet sich:

1) $m_3a^n + (m+1)_3 . n a^{n-1} b + (m+2)_3 . n_2 a^{n-2} b^2 + (m+3)_3 . n_3 a^{n-3} b^3 + \ldots$

$$= (a+b)^{n-1} \left[m_3 a + (m(m+3n-3)-3n+2) . \frac{m}{2.3} . b \right] + n_2 . m (a+b)^{n-2} b^2 + n_3 (a+b)^{n-3} b^3$$

2) $m_4 a^n + (m+1)_4 n a^{n-1} b + (m+2)_4 . n_2 . a^{n-2} b^2 + (m+3)_4 . n_3 . a^{n-3} b^3 + \ldots$

$$= (a+b)^{n-1} \left[m_4 a + (m(m(m+4n-6)-12n+11)+8n-6) \cdot \frac{m}{2.3.4} . b \right] + n_2 m_2 (a+b)^{n-2} b^2 + n_3 m (a+b)^{n-3} b^3 + n_4 (a+b)^{n-4} b^4.$$

u. s. w.

Von der Richtigkeit dieser Formeln, sowie der 5ten in (124. und 125.) überzeugt man sich auch, wenn man die Größe $(a+b)^{n-1}$ wirklich entwickelt, diese Entwickelung mit dem betreffenden Faktor multiplicirt und diesem Producte die weiteren Summanden beifügt.

127. Aufgabe. Es sind nachstehende Reihen gegeben, man soll ihre Summenformeln bestimmen.

1) $\overset{I}{s} = 1 + 2z + 4_2 z^2 + 6_3 z^3 + \ldots .$

2) $\overset{II}{s} = 1 + 3z + 5_2 z^2 + 7_3 z^3 + \ldots .$

3) $\overset{III}{s} = 1 + 4z + 6_2 z^2 + 8_3 z^3 + \ldots .$

4) $\overset{IV}{s} = 1 + 5z + 7_2 z^2 + 9_3 z^3 + \ldots .$

5) $\overset{V}{s} = 1 + 6z + 8_2 z^2 + 10_3 z^3 + \ldots .$

6) $\overset{VI}{s} = 1 + 7z + 9_2 z^2 + 11_3 z^3 + \ldots .$

u. s. w.

Auflösung. Nach (123. 2.) kann man für $\overset{I}{s}$, da die Coefficienten der Reihe von der Form $(2m)_m$ sind, schreiben:

$$\overset{I}{s} = 1 - (-\tfrac{1}{2}) . 4z + (-\tfrac{1}{2})_2 . 4^2 z^2 - (-\tfrac{1}{2})_3 . 4^3 z^3 + \ldots .$$ daher ist:

7) $\overset{I}{s} = (1-4z)^{-1/2}$. Ferner ist: $\dfrac{\overset{I}{s}-1}{2z} = 1 + 3z + 5_2 z^2 + 7_3 z^3 + \ldots \quad (= \overset{II}{s})$, mithin:

8) $\overset{II}{s} = \dfrac{\overset{I}{s}-1}{2z}$. Wendet man nun die bekannte Formel der Binomial-Coefficienten $(a+1)_n = a_n + a_{n-1}$ an, so ergibt sich aus 2)

$$\left.\begin{aligned} \overset{II}{s} = 1 + 2_1 z + 4_2 z^2 + 6_3 z^3 + \ldots \quad & (= \overset{I}{s}) \\ + 2_0 z + 4_1 z^2 + 6_2 z^3 + \ldots \quad & (= \overset{III}{s} z) \end{aligned}\right\}$$ und es folgt:

9) $\overset{III}{s} = \dfrac{\overset{II}{s} - \overset{I}{s}}{z}$. Auf gleiche Weise ergibt sich:

10) $\overset{IV}{s} = \dfrac{\overset{III}{s} - \overset{II}{s}}{z}$, 11) $\overset{V}{s} = \dfrac{\overset{IV}{s} - \overset{III}{s}}{z}$, 12) $\overset{VI}{s} = \dfrac{\overset{V}{s} - \overset{IV}{s}}{z}$, u. s. w.

Es ergibt sich nun:

13) $\overset{I}{s} = \dfrac{1}{(1-4z)^{1/2}}$

14) $\overset{II}{s} = \left[\dfrac{1}{(1-4z)^{1/2}} - 1 \right] \cdot \dfrac{1}{2z}$

15) $\overset{III}{s} = \left[\dfrac{1-2z}{(1-4z)^{1/2}} - 1 \right] \cdot \dfrac{1}{2z^2}$

16) $\overset{IV}{s} = \left[\dfrac{1-3z}{(1-4z)^{1/2}} + z - 1 \right] \cdot \dfrac{1}{2z^3}$

17) $\overset{V}{s} = \left[\dfrac{1-4z+2z^2}{(1-4z)^{1/2}} + 2z - 1 \right] \cdot \dfrac{1}{2z^4}$

18) $\overset{VI}{s} = \left[\dfrac{1-5z+5z^2}{(1-4z)^{1/2}} - z^2 + 3z - 1 \right] \cdot \dfrac{1}{2z^5}$

u. s. w.

19) $2z^3 . \overset{IV}{s} = \dfrac{1-3z}{(1-4z)^{1/2}} + z - 1$ (Aus 16.)

20) $2z^3 . \overset{IV}{s} = \left[(1-4z)^{1/2} - 1 \right] + \dfrac{[(1-4z)^{1/2} + 1] z}{(1-4z)^{1/2}}$ (Aus 19.)

21) $2z^4 . \overset{V}{s} = 2z^3 . \overset{IV}{s} + \dfrac{[(1-4z)^{1/2} - 1 + 2z] z}{(1-4z)^{1/2}}$ (Aus 17. und 19.)

22) $2z^5 . \overset{VI}{s} = 2z^4 . \overset{V}{s} - 2z^3 \overset{IV}{s} . z.$ (Aus 18) und 20) oder auch 12), multiplicirt mit $2z^5$.)

128. Aufgabe. Es sind nachstehende Reihen gegeben, man soll ihre Summenformeln bestimmen.

1) $\overset{I}{S} = m + (m+1).2z + (m+2).4_2z^2 + (m+3).\ 6_3z^3 + \ldots$

2) $\overset{II}{S} = (m+1) + (m+2).3z + (m+3).5_2z^2 + (m+4).\ 7_3z^3 + \ldots$

3) $\overset{III}{S} = (m+2) + (m+3).4z + (m+4).6_2z^2 + (m+5).\ 8_3z^3 + \ldots$

4) $\overset{IV}{S} = (m+3) + (m+4).5z + (m+5).7_2z^2 + (m+6).\ 9_3z^3 + \ldots$

5) $\overset{V}{S} = (m+4) + (m+5).6z + (m+6).8_2z^2 + (m+7).10_3z^3 + \ldots$

6) $\overset{VI}{S} = (m+5) + (m+6).7z + (m+7).9_2z^2 + (m+8).11_3z^3 + \ldots$

u. s. w.

Auflösung. Die Reihe 1) ist die binomische Entwickelung von $\overset{1}{s} = (1-4z)^{-1/2}$ (127. 7.), deren Glieder der Ordnung nach mit m, m + 1, m + 2, u. s. w. multiplicirt sind; daher ergibt sich nach (124. 5.) daselbst $-\frac{1}{2}$ für n, 1 für a und $-4z$ für b geschrieben:

7) $\overset{I}{S} = (1-4z)^{-3/2}\,[m-(m-\tfrac{1}{2}).4z].$ Ferner ist:

$$\frac{\overset{I}{S}-m}{2z} = (m+1) + (m+2).3z + (m+3).5_2z^2 + (m+4).7_3z^3 + \ldots\ (= \overset{II}{S}),$$ mithin:

8) $\overset{II}{S} = \frac{\overset{I}{S}-m}{2z}.$ Wendet man nun wieder die bekannte Formel der Binomial-Coefficienten (127.) an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\overset{II}{S} &= m + (m+1).2_1z + (m+2).4_2z^2 + (m+3).6_3z^3 + \ldots & (&= \overset{I}{S})\\ &+ 1 + 2_1z + 4_2z^2 + 6_3z^3 + \ldots & (&= \overset{I}{s})\\ &+ (m+2).\ z + (m+3).4_1z^2 + (m+4).6_2z^3 + \ldots & (&= \overset{III}{S}z)\end{aligned}$$

und es folgt:

9) $\overset{III}{S} = \frac{\overset{II}{S}-\overset{I}{S}-\overset{I}{s}}{z}.$ Ebenso folgt: 10) $\overset{IV}{S} = \frac{\overset{III}{S}-\overset{II}{S}-\overset{II}{S}}{z}$ 11) $\overset{V}{S} = \frac{\overset{IV}{S}-\overset{III}{S}-\overset{III}{S}}{z}$ 12) $\overset{VI}{S} = \frac{\overset{V}{S}-\overset{IV}{S}-\overset{IV}{S}}{z}$

u. s. w.

Durch Substituirung ergibt sich weiter:

13) $\overset{I}{S} = \frac{m-(m-1/2).4z}{(1-4z)^{3/2}}$

14) $\overset{II}{S} = \left[\overset{I}{S}-m\right]\cdot\frac{1}{2z}$

15) $\overset{III}{S} = \left[\overset{I}{S}(1-2z)-m-2z.\overset{I}{s}\right]\cdot\frac{1}{2z^2}$

16) $\overset{IV}{S} = \left[\overset{I}{S}(1-3z)-m(1-z)-3z.\overset{I}{s}+z\right]\cdot\frac{1}{2z^3}$

17) $\overset{V}{S} = \left[\overset{I}{S}(1-4z+2z^2)-m(1-2z)-4z(1-z).\overset{I}{s}+2z\right]\cdot\frac{1}{2z^4}$

18) $\overset{VI}{S} = \left[\overset{I}{S}(1-5z+5z^2)-m(1-3z+z^2)-5z(1-2z).\overset{I}{s}+(3-2z)z\right]\cdot\frac{1}{2z^5}$

u. s. w.

129. Wird m = — 4 gesetzt, so erhält man:

1) $\overset{I}{S} = -\frac{4-18z}{(1-4z)^{3/2}}.$ (Aus 128. 13.) ‖ 2) $\frac{\overset{V}{S}}{z} = 1.6 + 2.8_2.z + 3.10_3.z^2 + 4.12_4.z^3 + \ldots$ (Aus 128. 5.)

$$2z^4.\overset{V}{S} = -\frac{4-18z}{(1-4z)^{3/2}}\cdot(1-4z+2z^2)+4-8z-\frac{4z(1-z)}{(1-4z)^{1/2}}+2z$$

$$-z^4.\overset{V}{S} = \frac{2-9z}{(1-4z)^{3/2}}\cdot(1-4z+2z^2)-2+3z+\frac{2z(1-z)}{(1-4z)^{1/2}}.$$

} nämlich den Werth von $\overset{I}{S}$ und ebenso den Werth von $\overset{1}{s}$ (127. 13.) in (128. 17.) substituirt.

Durch weitere Reduction findet sich:

3) $-z^4.\overset{V}{\mathfrak{s}} = 2\left[\frac{1-3z}{(1-4z)^{1/2}} + z - 1\right] + \frac{[(1-4z)^{1/2}-1+2z].z}{(1-4z)^{1/2}} - \frac{2z^3}{(1-4z)^{3/2}}$

4) $-z^4.\overset{V}{\mathfrak{s}} = 2.2z^3.\overset{IV}{s} + \frac{[(1-4z)^{1/2}-1+2z].z}{(1-4z)^{1/2}} - \frac{2z^3}{(1-4z)^{3/2}}$ (127. 19.)

130. Wird $m = -5$ gesetzt, so erhält man:

1) $\overset{I}{\mathfrak{s}} = -\frac{5-22z}{(1-4z)^{3/2}}$. (Aus 128. 13.) ‖ 2) $\frac{\overset{VI}{\mathfrak{s}}}{z} = 1.7 + 2.9_2.z + 3.11_3.z^2 + 4.13_4.z_3 + \dots$ (Aus 128. 6.)

$-2z^5.\overset{VI}{\mathfrak{s}} = \frac{5-22z}{(1-4z)^{3/2}}.(1-5z+5z^2) - 5 + 12z - 3z^2 + \frac{5z(1-2z)}{(1-4z)^{1/2}}$. } nämlich den Werth von $\overset{I}{\mathfrak{s}}$ und ebenso von $\overset{I}{s}$ (127. 13.) in (128. 18.) substituirt.

Durch Reduction findet sich weiter:

3) $-2z^5.\overset{VI}{\mathfrak{s}} = \left[2\left[\frac{1-3z}{(1-4z)^{1/2}} + z - 1\right] + \frac{[(1-4z)^{1/2}-1+2z].z}{(1-4z)^{1/2}} - \frac{2z^3}{(1-4z)^{3/2}}\right]$
$+ 3(1-z)\left[\frac{1-3z}{(1-4z)^{1/2}} + z - 1\right] + \frac{[(1-4z)^{1/2}-1+2z].3z}{(1-4z)^{1/2}}$. Mithin:

4) $2z^5.\overset{VI}{\mathfrak{s}} = z^4.\overset{V}{\mathfrak{s}} - 3(1-z).2z^3.\overset{IV}{s} - \frac{[(1-4z)^{1/2}-1+2z].3z}{(1-4z)^{1/2}}$ (129. 3. und 127. 19.)

131. Aufgabe. Es sind nachstehende Reihen gegeben, man soll ihre Summenformeln bestimmen.

1) $\overset{I}{\mathfrak{S}} = m_2 + (m+1)_2.2z + (m+2)_2.4_2z^2 + (m+3)_2.6_3z^3 + \dots$

2) $\overset{II}{\mathfrak{S}} = (m+1)_2 + (m+2)_2.3z + (m+3)_2.5_2z^2 + (m+4)_2.7_3z^3 + \dots$

3) $\overset{III}{\mathfrak{S}} = (m+2)_2 + (m+3)_2.4z + (m+4)_2.6_2z^2 + (m+5)_2.8_3z^3 + \dots$

4) $\overset{IV}{\mathfrak{S}} = (m+3)_2 + (m+4)_2.5z + (m+5)_2.7_2z^2 + (m+6)_2.9_3z^3 + \dots$

5) $\overset{V}{\mathfrak{S}} = (m+4)_2 + (m+5)_2.6z + (m+6)_2.8_2z^2 + (m+7)_2.10_3z^3 + \dots$

6) $\overset{VI}{\mathfrak{S}} = (m+5)_2 + (m+6)_2.7z + (m+7)_2.9_2z^2 + (m+8)_2.11_3z^3 + \dots$

u. s. w.

Auflösung. Die Reihe 1) ist die binomische Entwickelung von $\overset{I}{s} = (1-4z)^{-1/2}$ (127. 7.), deren Glieder der Ordnung nach mit m_2, $(m+1)_2$, $(m+2)_2$ u. s. w. multiplicirt sind, daher ergibt sich nach (125. 5.) daselbst $-\frac{1}{2}$ für n, 1 für a und $-4z$ für b geschrieben:

7) $\overset{I}{\mathfrak{S}} = (1-4z)^{-3/2}.[m_2-(m-2)m.2z] + 6(1-4z)^{-5/2}.z^2$. Ferner ist:

$$\frac{\overset{I}{\mathfrak{S}}-m_2}{2z} = (m+1)_2 + (m+2)_2.3z + (m+3)_2.5_2z^2 + \dots \quad (= \overset{II}{\mathfrak{S}}),$$ mithin:

8) $\overset{II}{\mathfrak{S}} = \frac{\overset{I}{\mathfrak{S}}-m_2}{2z}$. Wendet man wieder die bekannte Formel (127.) an, so ergibt sich:

$\overset{II}{\mathfrak{S}} = m_2 + (m+1)_2.3_1z + (m+2)_2.5_2z^2 + (m+3)_2.7_3z^3 + \dots$
$+ m + (m+1).3_1z + (m+2).5_2z^2 + (m+3).7_3z^3 + \dots$

$\overset{II}{\mathfrak{S}} = m_2 + (m+1)_2.2_1z + (m+2)_2.4_2z^2 + (m+3)_2.6_3z^3 + \dots \quad (= \overset{I}{\mathfrak{S}})$
$+ (m+1)_2.z + (m+2)_2.4_1z^2 + (m+3)_2.6_2z^3 + \dots$
$+ m + (m+1).2z + (m+2).4_2z^2 + (m+3).6_3z^3 + \dots \quad (= \overset{I}{\mathfrak{s}})$
$+ (m+1).z + (m+2).4_1z^2 + (m+3).6_2z^3 + \dots$

$$\overset{\mathrm{II}}{\mathfrak{S}} = m_2 + (m+1)_2 \,.\, 2z + (m+2)_2 \,.\, 4_2 z^2 + (m+3)_2 \,.\, 6_3 z^3 + \ldots \qquad (= \overset{\mathrm{I}}{\mathfrak{S}})$$

$$+ m + (m+1) \,.\, 2z + (m+2) \,.\, 4_2 z^2 + (m+3) \,.\, 6_3 z^3 + \ldots \qquad (= \overset{\mathrm{I}}{\mathfrak{s}})$$

$$+ (m+2)_2 \,.\, z + (m+3)_2 \,.\, 4_1 z^2 + (m+4)_2 \,.\, 6_2 z^3 + \ldots \qquad (= \overset{\mathrm{III}}{\mathfrak{S}} \,.\, z)$$

und es folgt:

9) $\overset{\mathrm{III}}{\mathfrak{S}} = \dfrac{\overset{\mathrm{II}}{\mathfrak{S}} - \overset{\mathrm{I}}{\mathfrak{S}} - \overset{\mathrm{I}}{\mathfrak{s}}}{z}$. Ebenso folgt: 10) $\overset{\mathrm{IV}}{\mathfrak{S}} = \dfrac{\overset{\mathrm{III}}{\mathfrak{S}} - \overset{\mathrm{II}}{\mathfrak{S}} - \overset{\mathrm{II}}{\mathfrak{s}}}{z}$ 11) $\overset{\mathrm{V}}{\mathfrak{S}} = \dfrac{\overset{\mathrm{IV}}{\mathfrak{S}} - \overset{\mathrm{III}}{\mathfrak{S}} - \overset{\mathrm{III}}{\mathfrak{s}}}{z}$ 12) $\overset{\mathrm{VI}}{\mathfrak{S}} = \dfrac{\overset{\mathrm{V}}{\mathfrak{S}} - \overset{\mathrm{IV}}{\mathfrak{S}} - \overset{\mathrm{IV}}{\mathfrak{s}}}{z}$

u. s. w.

Es ergibt sich nun durch Substituirung weiter:

13) $\overset{\mathrm{I}}{\mathfrak{S}} = \dfrac{m_2 - (m-2)\,m \,.\, 2z}{(1-4z)^{3/2}} + \dfrac{6z^2}{(1-4z)^{5/2}}$

14) $\overset{\mathrm{II}}{\mathfrak{S}} = \left[\overset{\mathrm{I}}{\mathfrak{S}} - m_2\right] \cdot \dfrac{1}{2z}$

15) $\overset{\mathrm{III}}{\mathfrak{S}} = \left[\overset{\mathrm{I}}{\mathfrak{S}}(1-2z) - m_2 - 2z \,.\, \overset{\mathrm{I}}{\mathfrak{s}}\right] \cdot \dfrac{1}{2z^2}$

16) $\overset{\mathrm{IV}}{\mathfrak{S}} = \left[\overset{\mathrm{I}}{\mathfrak{S}}(1-3z) - m_2(1-z) - 3z \,.\, \overset{\mathrm{I}}{\mathfrak{s}} + mz\right] \cdot \dfrac{1}{2z^3}$

17) $\overset{\mathrm{V}}{\mathfrak{S}} = \left[\overset{\mathrm{I}}{\mathfrak{S}}(1-4z+2z^2) - m_2(1-2z) - 4z(1-z)\,\overset{\mathrm{I}}{\mathfrak{s}} - 2z^2 \,.\, \overset{\mathrm{I}}{s}\right] \cdot \dfrac{1}{2z^4}$

18) $\overset{\mathrm{VI}}{\mathfrak{S}} = \left[\overset{\mathrm{I}}{\mathfrak{S}}(1-5z+5z^2) - m_2(1-3z+z^2) - 5z(1-2z)\,\overset{\mathrm{I}}{\mathfrak{s}} + m(3-2z)\,z + 5z^2 \,.\, \overset{\mathrm{I}}{s} - z^2\right] \cdot \dfrac{1}{2z^5}$

u. s. w.

132. Wird $m = -5$ gesetzt, so erhält man:

1) $\overset{\mathrm{I}}{\mathfrak{S}} = \dfrac{15-70z}{(1-4z)^{3/2}} + \dfrac{6z^2}{(1-4z)^{5/2}}$ (Aus 131. 13.) und ferner:

2) $\dfrac{\overset{\mathrm{VI}}{\mathfrak{S}}}{z^5} = 2_2 \,.\, 9_2 + 3_2 \,.\, 11_3 z + 4_2 \,.\, 13_4 z^2 + 5_2 \,.\, 15_5 z^3 + \ldots.$ (Aus 131. 6.)

$$2z^5 \,.\, \overset{\mathrm{VI}}{\mathfrak{S}} = \left[\frac{15-70z}{(1-4z)^{3/2}} + \frac{6z^2}{(1-4z)^{5/2}}\right](1-5z+5z^2) - 15(1-3z+z^2) + \frac{5z(1-2z)(5-22z)}{(1-4z)^{3/2}}$$
$$-5(3-2z)\,z + \frac{5z^2}{(1-4z)^{1/2}} - z^2,$$

nämlich den Werth von $\overset{\mathrm{I}}{\mathfrak{S}}$ und ebenso die Werthe von $\overset{\mathrm{I}}{\mathfrak{s}}$ (130. 1.) und $\overset{\mathrm{I}}{s}$ (127. 13.) in (131. 18.) substituirt.

Durch Reduction findet sich weiter:

3) $$2z^5 \,.\, \overset{\mathrm{VI}}{\mathfrak{S}} = 5\left[2\left[\frac{1-3z}{(1-4z)^{1/2}} + z - 1\right] + \frac{[(1-4z)^{1/2} - 1 + 2z]z}{(1-4z)^{1/2}} - \frac{2z^3}{(1-4z)^{3/2}}\right]$$
$$+ 5(1-2z)\left[\frac{1-3z}{(1-4z)^{1/2}} + z - 1\right] + \frac{[(1-4z)^{1/2} - 1] \,.\, 4z^2}{(1-4z)^{1/2}} - \frac{2z^3}{(1-4z)^{3/2}} + \frac{6z^4}{(1-4z)^{5/2}}$$

4) $2z^5 \,.\, \overset{\mathrm{VI}}{\mathfrak{S}} = -5z^4 \,.\, \overset{\mathrm{V}}{\mathfrak{s}} + 5(1-2z) \,.\, 2z^3 \,.\, \overset{\mathrm{IV}}{s} + \dfrac{[(1-4z)^{1/2} - 1] \,.\, 4z^2}{(1-4z)^{1/2}} - \dfrac{2z^3}{(1-4z)^{3/2}} + \dfrac{6z^4}{(1-4z)^{5/2}}$ (129. 3. u. 127. 19.)

u. s. w.

II. Summenformeln.

133. Wir wollen, indem wir die Summe jeder Vertikalreihe (101.) mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen, die in (104.) angenommenen charakteristischen Zeichen diesem Buchstaben beifügen und es bedeute allgemein $\overset{p}{\mathfrak{S}}_q$ die Summe der qten Vertikalreihe der pten Hauptgruppe.

Analog wollen wir die Summe der ersten π $(= p - \beta + 1)$ (115. 6.) Vertikalreihen einer und derselben correspondirenden Reihe mit $\overset{p}{\mathfrak{T}}_q$ bezeichnen, dabei aber die Werthe für $q = 1$ und $p = 1$ nicht anschreiben. Hiernach ist:

1) $\mathfrak{S} + \overset{2}{\mathfrak{S}} = \overset{2}{\mathfrak{T}}$

$\overset{2}{\mathfrak{T}} + \overset{3}{\mathfrak{S}} = \overset{3}{\mathfrak{T}}$

$\overset{3}{\mathfrak{T}} + \overset{4}{\mathfrak{S}} = \overset{4}{\mathfrak{T}}$

$\overset{4}{\mathfrak{T}} + \overset{5}{\mathfrak{S}} = \overset{5}{\mathfrak{T}}$

u. s. w.

2) $\overset{4}{\mathfrak{S}}_{II} + \overset{5}{\mathfrak{S}}_{II} = \overset{5}{\mathfrak{T}}_{II}$

$\overset{5}{\mathfrak{T}}_{II} + \overset{6}{\mathfrak{S}}_{II} = \overset{6}{\mathfrak{T}}_{II}$

$\overset{6}{\mathfrak{T}}_{II} + \overset{7}{\mathfrak{S}}_{II} = \overset{7}{\mathfrak{T}}_{II}$

u. s. w.

3) $\overset{5}{\mathfrak{S}}_{III} + \overset{6}{\mathfrak{S}}_{III} = \overset{6}{\mathfrak{T}}_{III}$

$\overset{6}{\mathfrak{T}}_{III} + \overset{7}{\mathfrak{S}}_{III} = \overset{7}{\mathfrak{T}}_{III}$

u. s. w.

134. Es ist:

1) $\mathfrak{S} = -\frac{A}{B}$

Es sei:

2) $\frac{2C}{B} \cdot \mathfrak{S} = S$

3) $\frac{AC}{B^2} = z$

so ist:

4) $-\frac{2C}{B} \cdot \frac{A}{B} = S$

5) $S = -2z$

6) $z = -\frac{S}{2}$

135. Es bezeichnet:

1) $\overset{2}{\mathfrak{S}}$ die Summe der Vertikalreihe des 2. Grades. Es sei:

2) $\frac{2C}{B} \cdot \overset{2}{\mathfrak{S}} = \overset{II}{S}$

3) $\frac{AC}{B^2} = z;$ so ist:

4)
$$\overset{2}{\mathfrak{S}} = -\tfrac{1}{1} \cdot 2_0 A^2 C B^{-3} - \tfrac{1}{2} \cdot 4_1 A^3 C^2 B^{-5} - \tfrac{1}{3} \cdot 6_2 A^4 C^3 B^{-7} - \dots - \frac{1}{m-1} (2m-2)_{m-2} A^m C^{m-1} B^{-2m+1} - \dots$$

5)
$$\overset{II}{S} = +1 - (\tfrac{1}{2})_1 \cdot 4z + (\tfrac{1}{2})_2 \cdot 4^2 z^2 - (\tfrac{1}{2})_3 \cdot 4^3 z^3 + (\tfrac{1}{2})_4 \cdot 4^4 z^4 - \dots + (-1)^{m-1} (\tfrac{1}{2})_m \cdot 4^m z^m - \dots \quad -1 + 2z$$
(121. 2.)

und es folgt:

6) $\overset{II}{S} = (1 - 4z)^{1/2} - 1 + 2z$

7) $\overset{II}{S} = (1 + 2S)^{1/2} - (1 + S)$ (134. 5.)

8) $S + \overset{II}{S} = (1 + 2S)^{1/2} - 1;$

oder setzt man der Kürze halber:

9) $S + \overset{II}{S} = \overset{II}{T};$ so folgt:

10) $\overset{II}{T} = (1 + 2S)^{1/2} - 1 = (1 - 4z)^{1/2} - 1$

11) $\overset{2}{\mathfrak{S}} = \frac{B}{2C} \left[(1 + 2S)^{1/2} - (1 + S) \right]$

12) $\overset{2}{\mathfrak{T}} = \frac{B}{2C} \left[(1 + 2S)^{1/2} - 1 \right]$

13) $\overset{2}{\mathfrak{T}} = \frac{B}{2C} \cdot \overset{II}{T}$

Anmerkung. Löst man die Größe $\overset{II}{T}$ (135. 10.) wieder in eine Reihe auf, so erhält man, weil der Wurzelgröße $(1 - 4z)^{1/2}$ zwei gleiche, aber entgegengesetzte, Werthe entsprechen:

$$\pm (1 - 4z)^{1/2} - 1 = \begin{cases} -1 + 1 - (\tfrac{1}{2}) \cdot 4z + (\tfrac{1}{2})_2 \cdot 4^2 z^2 - (\tfrac{1}{2})_3 \cdot 4^3 z^3 + \dots \\ -1 - 1 + (\tfrac{1}{2}) \cdot 4z - (\tfrac{1}{2})_2 \cdot 4^2 z^2 + (\tfrac{1}{2})_3 \cdot 4^3 z^3 - \dots \end{cases}$$

Da aber $\overset{II}{T}$ nur die Summe der oberen Reihe ausdrückt, so folgt, daß der Größe $(1 - 4z)^{1/2}$ nur ein einziger Werth, und zwar der positive, entspricht.

136. Es bezeichnet:

1) $\overset{3}{\mathfrak{S}}$ die Summe der ersten Vertikalreihe correspondirender Reihen des dritten Grades. Es sei:

2) $\frac{2C^3}{B^2D}\cdot\overset{3}{\mathfrak{S}} = \overset{III}{S}$

3) $\frac{AC}{B^2} = z$ so ist:

4) $$\overset{3}{\mathfrak{S}} = +1\,.\,\tfrac{1}{1}\,.\,3_0A^3C^0DB^{-4} + 2\,.\,\tfrac{1}{2}\,.\,5_1A^4C^1DB^{-6} + 3\,.\,\tfrac{1}{3}\,.\,7_2A^5C^2DB^{-8} + \dots + (m-2)\,.\,\frac{1}{m-2}(2m-3)_{m-3}A^mC^{m-3}B^{-2m+2} + \dots$$

5) $$2\overset{III}{S} = -2\,.\,-1\quad -2$$
$$-1\,.\,(\tfrac{1}{2})\,.\,4z + 2z$$
$$\pm 0\,.\,(\tfrac{1}{2})_2\,.\,4^2z^2$$
$$+1\,.\,(\tfrac{1}{2})_3\,.\,4^3z^3$$
$$-2\,.\,(\tfrac{1}{2})_4\,.\,4^4z^4$$
$$+3\,.\,(\tfrac{1}{2})_5\,.\,4^5z^5$$
$$-\dots$$
$$+(-1)^{m-1}(m-2)(\tfrac{1}{2})_m\,.\,4^mz^m \quad (122.\ 2.)$$
$$-\dots$$

Hieraus ergibt sich, daß $2\overset{III}{S}$ gleich der binomischen Entwickelung von $-(1-4z)^{1/2}$ ist, deren Glieder der Ordnung nach mit -2, -1, 0, $+1$, $+2$ u. s. w. multiplicirt sind. Setzt man daher (124. 5.) $a = 1$, $b = -4z$, $n = \frac{1}{2}$ $m = -2$, so ergibt sich:

6) $2\overset{III}{S} = -(1-4z)^{-1/2}.(-2+6z) + 2z - 2 = 2\left[\frac{1-3z}{(1-4z)^{1/2}} + z - 1\right]$; daher:

7) $\overset{III}{S} = 2z^3\,.\,\overset{IV}{s}$ (127. 19.)

8) $\overset{III}{S} = \left[(1-4z)^{1/2} - 1\right] + \frac{[(1-4z)^{1/2}+1]\,z}{(1-4z)^{1/2}}$ (127. 20.)

9) $\overset{III}{S} = \overset{II}{T} - \frac{(2+\overset{II}{T})\overset{II}{S}}{(1+\overset{II}{T})2} = \overset{II}{T} - \frac{\overset{II}{S}}{1+\overset{II}{T}}\cdot\frac{2+\overset{II}{T}}{2}$ (135. 10. und 134. 6.)

10) $\overset{3}{\mathfrak{S}} = \frac{B^2D}{2C^3}\cdot\overset{III}{S}$

137. Es bezeichnet:

1) $\overset{4}{\mathfrak{S}}$ die Summe aller Glieder der zweiten Vertikalreihe correspondirender Reihen des dritten Grades oder die Summe aller Glieder der ersten Vertikalreihe der vierten Hauptgruppe. Es sei:

2) $\frac{2C^5}{B^3D^2}\cdot\overset{4}{\mathfrak{S}} = \overset{IV}{S}$

3) $\frac{AC}{B^2} = z$ so ist:

4) $$\overset{4}{\mathfrak{S}} = -\tfrac{1}{2}\,.\,6_1\,.\,1\,.\,A^5C^0D^2B^{-7} - \tfrac{1}{3}\,.\,8_2\,.\,3\,.\,A^6C^1D^2B^{-9} - \tfrac{1}{4}\,.\,10_3\,.\,6\,.\,A^7C^2D^2B^{-11} - \tfrac{1}{5}\,.\,12_4\,.\,10\,.\,A^8C^3D^2B^{-13} - \dots - \frac{1}{m-3}(2m-4)_{m-4}(m-3)_2A^mC^{m-5}D^2B^{-2m+3} - \dots$$

5) $$-\frac{1}{2z^5}\cdot\overset{IV}{S} = +\tfrac{1}{2}\,.\,6_1 + \tfrac{2}{2}\,.\,8_2\,.\,z + \tfrac{3}{2}\,.\,10_3\,.\,z^2 + \tfrac{4}{2}\,.\,12_4\,.\,z^3 + \dots + \frac{m-4}{2}(2m-4)_{m-4}\,.\,z^m + \dots$$ daher:

6) $-\frac{1}{z^5}\cdot\overset{IV}{S} = 1.6 + 2.8_2.z + 3.10_3.z^2 + 4.12_4.z^3 + \dots$ (129. 2.) Mithin ist:

7) $\overset{IV}{S} = -z^4\,.\,\overset{V}{s}$ und folglich:

8) $\overset{IV}{S} = 2.2z^3.\overset{IV}{s} + \frac{[(1-4z)^{1/2} - 1 + 2z]z}{(1-4z)^{1/2}} - \frac{2z^3}{(1-4z)(1-4z)^{1/2}}$ (129. 4.)

9) $\overset{IV}{S} = 2\overset{III}{S} - \frac{\overset{II}{S}S}{(1+\overset{II}{T}).2} + \frac{S^3}{4(1+2S)(1+\overset{II}{T})}$
(136. 7.) (135. 6, 135. 10 und 134. 6.) (134. 5, 134. 6 und 135. 10.)

10) $\overset{IV}{S} = 2\overset{III}{S} - \frac{S}{1+\overset{II}{T}} \cdot \left[\frac{\overset{II}{S}}{2} - \frac{S^2}{4(1+2S)}\right]$

11) $\overset{4}{\mathfrak{S}} = \frac{B^3D^2}{2C^5} \cdot \overset{IV}{S}$

138. Es bezeichnet:

1) $\overset{4}{\mathfrak{S}}_{II}$ die Summe aller Glieder der zweiten Vertikalreihe der vierten Hauptgruppe. Es sei:

2) $-\frac{2C^4}{B^3E} \cdot \overset{4}{\mathfrak{S}}_{II} = \overset{IV}{S}_{II}$ 3) $\frac{AC}{B^2} = z$ so ist:

4) $$\overset{4}{\mathfrak{S}}_{II} = -\tfrac{1}{1} . 4_0 . 1 . A^4C^0EB^{-5} - \tfrac{1}{2} . 6_1 . 2 . A^5C^1EB^{-7} - \tfrac{1}{3} . 8_2 . 3 . A^6C^2EB^{-9} - \tfrac{1}{4} . 10_3 . 4 . A^7C^3EB^{-11} - \ldots .$$

5) $$\frac{1}{2z^4}\overset{IV}{S}_{II} = 1 + 6_1 . z + 8_2 . z^2 + 10_3 . z^3 + \ldots .$$ daher:

6) $\frac{1}{2z^5}\overset{IV}{S}_{II} = \overset{V}{s}$ (127. 5.) 7) $\overset{IV}{S}_{II} = 2z^4 . \overset{V}{s}$

8) $$\overset{IV}{S}_{II} = 2z^3 . \overset{IV}{s} + \frac{[(1-4z)^{1/2} - 1 + 2z]z}{(1-4z)^{1/2}} \text{ (127. 21.) } = \overset{III}{S} - \frac{\overset{II}{S} . S}{(1+\overset{II}{T}) . 2}$$
(136. 7.) (135. 6. u. 134. 6.)

9) $\overset{IV}{S}_{II} = \overset{III}{S} - \frac{S}{1+\overset{II}{T}} \cdot \frac{\overset{II}{S}}{2}$; 10) $\overset{4}{\mathfrak{S}}_{II} = -\frac{B^3E}{2C^4} \cdot \overset{IV}{S}_{II}$

139. Es bezeichnet:

1) $\overset{5}{\mathfrak{S}}$ die Summe aller Glieder der dritten Vertikalreihe correspondirender Reihen des dritten Grades oder die Summe aller Glieder der ersten Vertikalreihe der fünften Hauptgruppe. Es sei:

2) $\frac{6C^7}{B^4D^3} \cdot \overset{5}{\mathfrak{S}} = \overset{V}{S}$ 3) $\frac{AC}{B^2} = z$ so ist:

4) $$\overset{5}{\mathfrak{S}} = \tfrac{1}{3} . 9_2 . 3_3 . A^7C^0D^3B^{-10} + \tfrac{1}{4} . 11_3 . 4_3 . A^8C^1D^3B^{-12} + \tfrac{1}{5} . 13_4 . 5_3 . A^9C^2D^3B^{-14} + \tfrac{1}{6} . 15_5 . 6_3 . A^{10}C^3D^3B^{-16} + \ldots .$$

5) $$\frac{1}{6z^7}\overset{V}{S} = \tfrac{1}{3} . 2_2 . 9_2 + \tfrac{1}{3} . 3_2 . 11_3 . z + \tfrac{1}{3} . 4_2 . 13_4 . z^2 + \tfrac{1}{3} . 5_2 . 15_5 . z^3 + \ldots .$$ daher:

6) $\frac{1}{2z^7}\overset{V}{S} = 2_2 . 9_2 + 3_2 . 11_3 . z + 4_2 . 13_4 . z^2 + 5_2 . 15_5 . z^3 + \ldots .$ (132. 2.) mithin:

7) $\overset{V}{S} = 2z^5 . \overset{VI}{\mathfrak{S}}$ und folglich:

8) $$\overset{V}{S} = -5z^4 . \overset{V}{\mathfrak{s}} + 5(1-2z) . 2z^3 . \overset{IV}{s} + \frac{[(1-4z)^{1/2} - 1] . 4z^2}{(1-4z)^{1/2}} - \frac{2z^3}{(1-4z)(1-4z)^{1/2}} + \frac{6z^4}{(1-4z)^2(1-4z)^{1/2}}$$ (132. 4.)

9) $$\overset{V}{S} = 5\overset{IV}{S} + 5(1+S)\overset{III}{S} + \frac{\overset{II}{T}S^2}{1+\overset{II}{T}} + \frac{S^3}{4(1+2S)(1+\overset{II}{T})} + \frac{3S^4}{8(1+2S)^2(1+\overset{II}{T})}$$
(137. 7.) (134. 5, 136. 7.) (135. 10, 134. 5.) (137. 9.) (134. 5, 135. 10.)

10) $$\overset{V}{S} = 5\overset{IV}{S} + 5(1+S)\overset{III}{S} + \frac{S}{1+\overset{II}{T}}\left[\overset{II}{T}S + \frac{S^2}{4(1+2S)} + \frac{3S^3}{8(1+2S)^2}\right]$$

11) $\overset{5}{\mathfrak{S}} = \frac{B^4D^3}{6C^7} \cdot \overset{V}{S}$

140. Es bezeichnet:

1) $\overset{5}{\mathfrak{S}}_{II}$ die Summe aller Glieder der zweiten Vertikalreihe der fünften Hauptgruppe. Es sei:

2) $\frac{2C^6}{B^4DE} \cdot \overset{5}{\mathfrak{S}}_{II} = \overset{V}{S}_{II}$

3) $\frac{AC}{B^2} = z$ so ist:

4) $$\overset{5}{\mathfrak{S}}_{II} = \tfrac{1}{2} \cdot 7_1 \cdot 2 \cdot 2_2 \cdot A^6C^0DEB^{-8} + \tfrac{1}{3} \cdot 9_2 \cdot 2 \cdot 3_2 \cdot A^7C^1DEB^{-10} + \tfrac{1}{4} \cdot 11_3 \cdot 2 \cdot 4_2 \cdot A^8C^2DEB^{-12} + \tfrac{1}{5} \cdot 13_4 \cdot 2 \cdot 5_2 \cdot A^9C^3DEB^{-14} + \ldots$$

5) $$\frac{1}{2z^6} \cdot \overset{V}{S}_{II} = 1 \cdot 7_1 + 2 \cdot 9_2 \cdot z + 3 \cdot 11_3 \cdot z^2 + 4 \cdot 13_4 \cdot z^3 + \ldots$$

Nun ist:

6) $$\frac{\overset{VI}{\mathfrak{s}}}{z} = 1 \cdot 7_1 + 2 \cdot 9_2 \cdot z + 3 \cdot 11_3 \cdot z^2 + 4 \cdot 13_4 \cdot z^3 + \ldots \quad (130.\ 2.);$$

daher:

7) $$\overset{V}{S}_{II} = 2z^5 \cdot \overset{VI}{\mathfrak{s}} = z^4 \cdot \overset{V}{\mathfrak{s}} - 3(1-z) \cdot 2z^3 \cdot \overset{IV}{s} - \frac{[(1-4z)^{1/2} - 1 + 2z] \cdot 3z}{(1-4z)^{1/2}} \quad (130.\ 4.)$$

8) $$\overset{V}{S}_{II} = -\overset{IV}{S} - 3(1-z)\overset{III}{S} + \frac{\overset{II}{S} \cdot 3S}{(1+\overset{II}{T})2}$$

(137. 7.) (136. 7.) (135. 6 u. 10.)

9) $$\overset{V}{S}_{II} = -\overset{IV}{S} - \tfrac{3}{2}(2+S)\overset{III}{S} + \frac{S}{1+\overset{II}{T}} \cdot \frac{3\overset{II}{S}}{2}$$

10) $$\overset{5}{\mathfrak{S}}_{II} = \frac{B^4DE}{2C^6} \cdot \overset{V}{S}_{II}$$

141. Es bezeichnet:

1) $\overset{5}{\mathfrak{S}}_{III}$ die Summe aller Glieder der dritten Vertikalreihe der fünften Hauptgruppe. Es sei:

2) $\frac{2C^5}{B^4F} \cdot \overset{5}{\mathfrak{S}}_{III} = \overset{V}{S}_{III}$

3) $\frac{AC}{B^2} = z$ so ist:

4) $$\overset{5}{\mathfrak{S}}_{III} = A^5C^0FB^{-6} + \tfrac{1}{2} \cdot 7_1 \cdot 2 \cdot A^6C^1FB^{-8} + \tfrac{1}{3} \cdot 9_2 \cdot 3 \cdot A^7C^2FB^{-10} + \tfrac{1}{4} \cdot 11_3 \cdot 4 \cdot A^8C^3FB^{-12} + \ldots$$

5) $$\frac{1}{2z^5} \cdot \overset{V}{S}_{III} = 1 + 7_1 \cdot z + 9_2 \cdot z^2 + 11_3 \cdot z^3 + \ldots = \overset{VI}{s} \quad (127.\ 6)$$

also:

6) $$\overset{V}{S}_{III} = 2z^5 \cdot \overset{VI}{s} = 2z^4 \cdot \overset{V}{s} - 2z^3 \cdot \overset{IV}{s} \cdot z \quad (127.\ 22.)$$

7) $$\overset{V}{S}_{III} = \overset{IV}{S}_{II} - \overset{III}{S} \cdot z = \overset{IV}{S}_{II} + \tfrac{1}{2}\overset{III}{S} \cdot S$$

(138. 7.) (136. 7.) (134. 6.)

8) $$\overset{5}{\mathfrak{S}}_{III} = \frac{B^4F}{2C^5} \cdot \overset{V}{S}_{III}$$

Convergenz

der

entwickelten Reihen.

---

142. Es dürfte aus dem Bisherigen erhellen, wie man verfahren könne, wollte man das Geschäft des Summirens der Vertikalreihen fortsetzen. Wir wollen uns indessen mit den bereits gefundenen Resultaten begnügen und nunmehr untersuchen, ob, wie weit und unter welchen Bedingungen die gefundenen Summenformeln zur Bestimmung der reellen Wurzeln numerischer Gleichungen ausreichen.

Da die Zahl der Vertikalreihen, und mithin auch die Zahl der Summenformeln, eine unendliche ist, so bilden ihre Summen selbst wieder eine Reihe von einer unendlichen Anzahl Glieder, welche wir die Summenreihe nennen wollen.

Soll nun eine geringe Anzahl der vorderen Glieder schon ausreichen, einen genäherten Werth sämmtlicher Glieder zu bestimmen, so muß die Summenreihe selbst schnell convergiren und wollen wir mit den gefundenen sieben Summengliedern den wahren Werth annähernd bestimmen, so wird der Unterschied des genäherten und wahren Werthes mit der sechsten Hauptgruppe beginnen.

Uebrigens lassen sich aus den bereits gefundenen Resultaten folgende Schlüsse ziehen:

1) Die Summenreihe ist eine rekurrirende Reihe und es läßt sich jedes folgende Glied durch die vorhergehenden Glieder ausdrücken.

2) Die Wurzelgröße des zweiten Gliedes der Summenreihe ist in allen folgenden Gliedern enthalten und es sind letztere nicht mit Wurzelgrößen behaftet, welche sich nicht auf die Wurzelgröße $(1 - 4z)^{1/2}$ zurückführen ließen.

3) Wird daher für diese Wurzelgröße die Convergenz der entwickelten Glieder, also die Convergenz der Vertikalreihe des zweiten Grades, nachgewiesen, so ist hierdurch zugleich die Convergenz aller Vertikalreihen festgestellt.

4) Von dieser Feststellung ist jedoch der Fall ausgeschlossen, in welchem für die Vertikalreihe des zweiten Grades der geringste Grad von Convergenz stattfindet, nämlich wenn $1 = 4z$ ist (152.). Daß für diesen Fall schon die erste Vertikalreihe der correspondirenden Reihen des dritten Grades, und somit auch jede folgende Vertikalreihe, divergirt, erhellet aus Formel (136. 8.), aus welcher sich $\overset{\text{III}}{S} = \infty$ (für $1 = 4z$) ergibt.

Wir wollen nun die (in 20 vernachlässigte) nähere Untersuchung über die Bedingungen der Convergenz der durch die Umkehrung erhaltenen Reihen allgemein vornehmen und unterscheiden dabei:

I. Convergenz der Vertikalreihen.

II. Horizontales Abnehmen der correspondirenden Reihen.

III. Staffelförmige Convergenz der correspondirenden Reihen.

I. Convergenz der Vertikalreihen.

143. Wenn man das allgemeine Glied (112. 3.) durch sein vertikalfolgendes (112. 4.) dividirt, so ergibt sich:

1) $\dfrac{\overset{p}{m}\,[\mathfrak{Y}]}{\overbrace{m+1}^{p}\,[\mathfrak{Y}]} = \dfrac{B^2}{\dfrac{(2m-p+2)(2m-p+1)}{(m+1)(m-2p+\beta-\alpha+2)} \cdot AC}$ und die aufeinanderfolgenden Glieder der Vertikalreihen sind abnehmend, wenn:

2) $B^2 > \dfrac{(2m-p+2)(2m-p+1)}{(m+1)(m-2p+\beta-\alpha+2)} \cdot AC$ ist. Substituirt man in dieser Ungleichung für m (aus 115. 4.) seinen Werth, so erhält man:

3) $B^2 > \dfrac{(2\mu+3p-2\beta+2\alpha-2)(2\mu+3p-2\beta+2\alpha-3)}{(\mu+2p-\beta+\alpha-1)\mu} \cdot AC$ diese Ungleichung ausgedrückt durch die Gliederzahl der allgemeinen Vertikalreihe. Setzt man in dieser Ungleichung $\mu = 1$, so erhält man:

4) $B^2 > \dfrac{(3p-2\beta+2\alpha)(3p-2\beta+2\alpha-1)}{2p-\beta+\alpha} \cdot AC$ für welche Bedingung das erste Glied jeder Vertikalreihe größer wie das zweite ist.

144. Nimmt man (in 143. 1.) den Werth von m so groß an, daß gegen ihn die übrigen Summanden als verschwindend klein zu betrachten sind, so geht diese Gleichung über in:

1) $\lim. \dfrac{\overset{p}{m}\,[\mathfrak{Y}]}{\overbrace{m+1}^{p}\,[\mathfrak{Y}]} = \dfrac{B^2}{4AC}$ Ist daher 2) $B^2 > 4AC$

welche Bedingung sich auch aus (143. 3.) ableiten läßt, so kann man sagen: Findet diese Ungleichung statt, so sind sämmtliche Vertikalreihen für sehr hohe Gliederzahlen abnehmend.

145. Soll eine Vertikalreihe auch für die Anfangsglieder abnehmend sein, so muß die Ungleichung (143. 4.) stattfinden. Legt man in derselben der Größe p einen so hohen Werth bei, daß dagegen die übrigen Summanden als verschwindend klein betrachtet werden können, so geht sie über in:

$$1)\quad B^2 > \tfrac{9}{2}p \cdot AC$$

Diese Ungleichung wird um so kleiner, je größer p wird, daher wird sich immer ($C \gtrless 0$ gedacht) ein Werth $p' > p$ ergeben, für welche dieselbe übergeht in:

$$2)\quad B^2 < \tfrac{9}{2}p' \cdot AC$$

Hieraus folgt: Wie groß auch die Ungleichung (144. 2. oder 143. 4.) sein möge, so nehmen doch die Anfangsglieder der, hohen Stellenzahlen der Hauptgruppen entsprechenden, Vertikalreihen stets zu, oder es ist für hohe Werthe von p stets:

3) $\overbrace{1+2p-\beta+\alpha-2}^{p}\,[\mathfrak{Y}] < \overbrace{2+2p-\beta+\alpha-2}^{p}\,[\mathfrak{Y}]$. Auf gleiche Weise findet sich auch für hohe Werthe von p:

4) $\overbrace{1+2p-\beta+\alpha-2}^{p}\,[\mathfrak{Y}] < \overbrace{3+2p-\beta+\alpha-2}^{p}\,[\mathfrak{Y}]$ u. s. w.

146. Da es uns bei der Bestimmung der Quotienten, welche man erhält, wenn man jedes Glied einer Vertikalreihe durch sein folgendes dividirt, hauptsächlich auf die Bestimmung der Coefficienten-Quotienten ankommt, so wollen wir diese besonders in Betrachtung ziehen, zu dem Ende die Coefficienten der Umkehrungsformel (101. 2.) ausrechnen und den Coefficienten eines jeden Gliedes jeder Vertikalreihe durch den Coefficienten des folgenden Gliedes dividiren.

1) $0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + Hx^7 \ldots.$

2) $x = -_{\mathrm{I}}\,\frac{A}{B} = \mathfrak{S}$

$\overset{2}{\mathfrak{S}} =$

Glied	Wert	Quotient
$-\overset{2}{2}$	$\frac{A^2C}{B^3}$	
		$\frac{1}{2}$
$-\overset{2}{3}$	$\frac{2A^3C^2}{B^5}$	
		$\frac{1}{2\frac{1}{2}}$
$-\overset{2}{4}$	$\frac{5A^4C^3}{B^7}$	
		$\frac{1}{2\frac{4}{5}}$
$-\overset{2}{5}$	$\frac{14A^5C^4}{B^9}$	
		$\frac{1}{3}$
$-\overset{2}{6}$	$\frac{42A^6C^5}{B^{11}}$	
		$\frac{1}{3\frac{1}{7}}$
$-\overset{2}{7}$	$\frac{132A^7C^6}{B^{13}}$	
		$\frac{1}{3\frac{1}{4}}$
$-\overset{2}{8}$	$\frac{429A^8C^7}{B^{15}}$	
		$\frac{1}{3\frac{1}{3}}$
$-\overset{2}{9}$	$\frac{1430A^9C^8}{B^{17}}$	
		$\frac{1}{3\frac{2}{5}}$
$-\overset{2}{10}$	$\frac{4862A^{10}C^9}{B^{19}}$	
		$\frac{1}{3\frac{5}{11}}$
$-\overset{2}{11}$	$\frac{16796A^{11}C^{10}}{B^{21}}$	
		$\frac{1}{3\frac{1}{2}}$
$-\overset{2}{12}$	....	

$\overset{3}{\mathfrak{S}} =$

Glied	Wert	Quotient
$+\overset{3}{3}$	$\frac{A^3D}{B^4}$	
		$\frac{1}{5}$
$+\overset{3}{4}$	$\frac{5A^4CD}{B^6}$	
		$\frac{1}{4\frac{1}{5}}$
$+\overset{3}{5}$	$\frac{21A^5C^2D}{B^8}$	
		$\frac{1}{4}$
$+\overset{3}{6}$	$\frac{84A^6C^3D}{B^{10}}$	
		$\frac{1}{3\frac{13}{14}}$
$+\overset{3}{7}$	$\frac{330A^7C^4D}{B^{12}}$	
		$\frac{1}{3\frac{9}{10}}$
$+\overset{3}{8}$	$\frac{1287A^8C^5D}{B^{14}}$	
		$\frac{1}{3\frac{8}{9}}$
$+\overset{3}{9}$	$\frac{5005A^9C^6D}{B^{16}}$	
		$\frac{1}{3\frac{31}{35}}$
$+\overset{3}{10}$	$\frac{19448A^{10}C^7D}{B^{18}}$	
		$\frac{1}{3\frac{39}{44}}$
$+\overset{3}{11}$	$\frac{75582A^{11}C^8D}{B^{20}}$	
		$\frac{1}{3\frac{8}{9}}$
$+\overset{3}{12}$	....	

$\overset{4}{\mathfrak{S}} =$

Glied	Wert	Quotient
$-\overset{4}{5}$	$\frac{3A^5D^2}{B^7}$	
		$\frac{1}{9\frac{1}{3}}$
$-\overset{4}{6}$	$\frac{28A^6CD^2}{B^9}$	
		$\frac{1}{6\frac{3}{7}}$
$-\overset{4}{7}$	$\frac{180A^7C^2D^2}{B^{11}}$	
		$\frac{1}{5\frac{1}{2}}$
$-\overset{4}{8}$	$\frac{990A^8C^3D^2}{B^{13}}$	
		$\frac{1}{5\frac{1}{18}}$
$-\overset{4}{9}$	$\frac{5005A^9C^4D^2}{B^{15}}$	
		$\frac{1}{4\frac{4}{5}}$
$-\overset{4}{10}$	$\frac{24024A^{10}C^5D^2}{B^{17}}$	
		$\frac{1}{4\frac{7}{11}}$
$-\overset{4}{11}$	$\frac{111384A^{11}C^6D^2}{B^{19}}$	
		$\frac{1}{4\frac{11}{21}}$
$-\overset{4}{12}$	....	

$\overset{4}{\mathfrak{S}}_{\mathrm{II}} =$

Glied	Wert	Quotient
$-\overset{4}{4}_{\mathrm{II}}$	$\frac{A^4E}{B^5}$	
		$\frac{1}{6}$
$-\overset{4}{5}_{\mathrm{II}}$	$\frac{6A^5CE}{B^7}$	
		$\frac{1}{4\frac{2}{3}}$
$-\overset{4}{6}_{\mathrm{II}}$	$\frac{28A^6C^2E}{B^9}$	
		$\frac{1}{4\frac{2}{7}}$
$-\overset{4}{7}_{\mathrm{II}}$	$\frac{120A^7C^3E}{B^{11}}$	
		$\frac{1}{4\frac{1}{8}}$
$-\overset{4}{8}_{\mathrm{II}}$	$\frac{495A^8C^4E}{B^{13}}$	
		$\frac{1}{4\frac{2}{45}}$
$-\overset{4}{9}_{\mathrm{II}}$	$\frac{2002A^9C^5E}{B^{15}}$	
		$\frac{1}{4}$
$-\overset{4}{10}_{\mathrm{II}}$	$\frac{8008A^{10}C^6E}{B^{17}}$	
		$\frac{1}{3\frac{75}{77}}$
$-\overset{4}{11}_{\mathrm{II}}$	$\frac{31824A^{11}C^7E}{B^{19}}$	
		$\frac{1}{3\frac{23}{24}}$
$-\overset{4}{12}_{\mathrm{II}}$	....	

$\overset{5}{\mathfrak{S}} =$

Glied	Wert	Quotient
$+\overset{5}{7}$	$\frac{12A^7D^3}{B^{10}}$	
		$\frac{1}{13\frac{3}{4}}$
$+\overset{5}{8}$	$\frac{165A^8CD^3}{B^{12}}$	
		$\frac{1}{8\frac{2}{3}}$
$+\overset{5}{9}$	$\frac{1430A^9C^2D^3}{B^{14}}$	
		$\frac{1}{7}$
$+\overset{5}{10}$	$\frac{10010A^{10}C^3D^3}{B^{16}}$	
		$\frac{1}{6\frac{2}{11}}$
$+\overset{5}{11}$	$\frac{61880A^{11}C^4D^3}{B^{18}}$	
		$\frac{1}{5\frac{7}{10}}$
$+\overset{5}{12}$	....	

$\overset{5}{\mathfrak{S}}_{\mathrm{II}} =$

Glied	Wert	Quotient
$+\overset{5}{6}_{\mathrm{II}}$	$\frac{7A^6DE}{B^8}$	
		$\frac{1}{10\frac{2}{7}}$
$+\overset{5}{7}_{\mathrm{II}}$	$\frac{72A^7CDE}{B^{10}}$	
		$\frac{1}{6\frac{7}{8}}$
$+\overset{5}{8}_{\mathrm{II}}$	$\frac{495A^8C^2DE}{B^{12}}$	
		$\frac{1}{5\frac{7}{9}}$
$+\overset{5}{9}_{\mathrm{II}}$	$\frac{2860A^9C^3DE}{B^{14}}$	
		$\frac{1}{5\frac{1}{4}}$
$+\overset{5}{10}_{\mathrm{II}}$	$\frac{15015A^{10}C^4DE}{B^{16}}$	
		$\frac{1}{4\frac{52}{55}}$
$+\overset{5}{11}_{\mathrm{II}}$	$\frac{74256A^{11}C^5DE}{B^{18}}$	
		$\frac{1}{4\frac{3}{4}}$
$+\overset{5}{12}_{\mathrm{II}}$	....	

$\overset{5}{\mathfrak{S}}_{\mathrm{III}} =$

Glied	Wert	Quotient
$+\overset{5}{5}_{\mathrm{III}}$	$\frac{A^5F}{B^6}$	
		$\frac{1}{7}$
$+\overset{5}{6}_{\mathrm{III}}$	$\frac{7A^6CF}{B^8}$	
		$\frac{1}{5\frac{1}{7}}$
$+\overset{5}{7}_{\mathrm{III}}$	$\frac{36A^7C^2F}{B^{10}}$	
		$\frac{1}{4\frac{7}{12}}$
$+\overset{5}{8}_{\mathrm{III}}$	$\frac{165A^8C^3F}{B^{12}}$	
		$\frac{1}{4\frac{1}{3}}$
$+\overset{5}{9}_{\mathrm{III}}$	$\frac{715A^9C^4F}{B^{14}}$	
		$\frac{1}{4\frac{1}{5}}$
$+\overset{5}{10}_{\mathrm{III}}$	$\frac{3003A^{10}C^5F}{B^{16}}$	
		$\frac{1}{4\frac{4}{33}}$
$+\overset{5}{11}_{\mathrm{III}}$	$\frac{12376A^{11}C^6F}{B^{18}}$	
		$\frac{1}{4\frac{1}{14}}$
$+\overset{5}{12}_{\mathrm{III}}$	....	

$\overset{6}{\mathfrak{S}} =$

Glied	Wert	Quotient
$-\overset{6}{9}$	$\frac{55A^9D^4}{B^{13}}$	
		$\frac{1}{18\frac{1}{5}}$
$-\overset{6}{10}$	$\frac{1001A^{10}CD^4}{B^{15}}$	
		$\frac{1}{10\frac{10}{11}}$
$-\overset{6}{11}$	$\frac{10920A^{11}C^2D^4}{B^{17}}$	
		$\frac{1}{8\frac{1}{2}}$
$-\overset{6}{12}$	....	

$\overset{6}{\mathfrak{S}}_{\mathrm{II}} =$

Glied	Wert	Quotient
$-\overset{6}{8}_{\mathrm{II}}$	$\frac{45A^8D^2E}{B^{11}}$	
		$\frac{1}{14\frac{2}{3}}$
$-\overset{6}{9}_{\mathrm{II}}$	$\frac{660A^9CD^2E}{B^{13}}$	
		$\frac{1}{9\frac{1}{10}}$
$-\overset{6}{10}_{\mathrm{II}}$	$\frac{6006A^{10}C^2D^2E}{B^{15}}$	
		$\frac{1}{7\frac{3}{11}}$
$-\overset{6}{11}_{\mathrm{II}}$	$\frac{43680A^{11}C^3D^2E}{B^{17}}$	
		$\frac{1}{6\frac{3}{8}}$
$-\overset{6}{12}_{\mathrm{II}}$	....	

3) $\dfrac{\mathfrak{C}.\ \overset{p}{m}[\mathfrak{Y}]}{\mathfrak{C}.\ \overset{p}{\widetilde{m+1}}[\mathfrak{Y}]} =$ (Siehe 147. 1.)

Reihe	3)	4) Allgemeine Glieder (Siehe 104.)
$\overset{2}{\mathfrak{S}}$	$\dfrac{1}{\frac{2(2m-1)}{m+1}}$	$-\overset{2}{m}[1]$ (1.)
$\overset{3}{\mathfrak{S}}$	$\dfrac{1}{\frac{(2m-1)(2m-2)}{(m+1)(m-2)}}$	$+\overset{3}{m}[1]$ (2.)
$\overset{4}{\mathfrak{S}}$	$\dfrac{1}{\frac{(2m-2)(2m-3)}{(m+1)(m-2)}}$	$-\overset{4}{m}[1]$ (3.)
$\overset{4}{\mathfrak{S}}_{\mathrm{II}}$	$\dfrac{1}{\frac{(2m-2)(2m-3)}{(m+1)(m-3)}}$	$-\overset{4}{m}[E]$ (8.)
$\overset{5}{\mathfrak{S}}$	$\dfrac{1}{\frac{(2m-3)(2m-4)}{(m+1)(m-6)}}$	$+\overset{5}{m}[1]$ (4.)
$\overset{5}{\mathfrak{S}}_{\mathrm{II}}$	$\dfrac{1}{\frac{(2m-3)(2m-4)}{(m+1)(m-4)}}$	$+\overset{5}{m}[E]$ (9.)
$\overset{5}{\mathfrak{S}}_{\mathrm{III}}$	$\dfrac{1}{\frac{(2m-3)(2m-4)}{(m+1)(m-4)}}$	$+\overset{5}{m}[F]$ (15.)
$\overset{6}{\mathfrak{S}}$	$\dfrac{1}{\frac{(2m-4)(2m-5)}{(m+1)(m-8)}}$	$-\overset{6}{m}[1]$ (5.)
$\overset{6}{\mathfrak{S}}_{\mathrm{II}}$	$\dfrac{1}{\frac{(2m-4)}{(m+1)}}$	$-\overset{6}{m}[E]$ (10.)

Anmerkung. In dieser Darstellung bedeuten die unter die Vorzeichen der entwickelten Glieder angeschriebenen Zahlen, die Werthe der entwickelten Glieder (nach 103.), bei welchen der Werth für p = 1 und q = 1 nicht angeschrieben ist, und die zwischen die Vertikalreihen angeschriebenen Bruchreihen enthalten die Coefficienten-Quotienten der bezüglichen Glieder. Außerdem ist dem ersten Gliede der Entwickelung sein Summenzeichen unterschrieben und die Summenzeichen der Vertikalreihen sind denselben überschrieben.

$\overset{6}{\mathfrak{S}}_{III} = \frac{8A^7DF}{B^9} - \overset{6}{7}_{III}$, $\quad \overset{6}{7}_{III} = \frac{90A^8CDF}{B^{11}} - \overset{6}{8}_{III}$, $\quad \overset{6}{8}_{III} = \frac{660A^9C^2DF}{B^{13}} - \overset{6}{9}_{III}$, $\quad \overset{6}{9}_{III} = \frac{4004A^{10}C^3DF}{B^{15}} - \overset{6}{10}_{III}$, $\quad \overset{6}{10}_{III} = \frac{21840A^{11}C^4DF}{B^{17}} - \overset{6}{11}_{III}$, $\quad \overset{6}{11}_{III} = \dots - \overset{6}{12}_{III}$

$\frac{(2m-5)}{(m-7)}$

Quotienten: $\frac{1}{11\frac{1}{4}}$, $\frac{1}{7\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{6\frac{1}{15}}$, $\frac{1}{5\frac{5}{11}}$, $\frac{1}{5\frac{1}{10}}$, … $\frac{1}{\frac{(2m-4)(2m-5)}{(m+1)(m-6)}}$

$-\overset{6}{m}[F]$ (16.)

$\overset{6}{\mathfrak{S}}_{IV} = \frac{4A^7E^2}{B^9} - \overset{6}{7}_{IV}$, $\quad \overset{6}{7}_{IV} = \frac{45A^8CE^2}{B^{11}} - \overset{6}{8}_{IV}$, $\quad \overset{6}{8}_{IV} = \frac{330A^9C^2E^2}{B^{13}} - \overset{6}{9}_{IV}$, $\quad \overset{6}{9}_{IV} = \frac{2002A^{10}C^3E^2}{B^{15}} - \overset{6}{10}_{IV}$, $\quad \overset{6}{10}_{IV} = \frac{10920A^{11}C^4E^2}{B^{17}} - \overset{6}{11}_{IV}$, $\quad \overset{6}{11}_{IV} = \dots - \overset{6}{12}_{IV}$

Quotienten: $\frac{1}{11\frac{1}{4}}$, $\frac{1}{7\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{6\frac{1}{15}}$, $\frac{1}{5\frac{5}{11}}$, $\frac{1}{5\frac{1}{10}}$, … $\frac{1}{\frac{(2m-4)(2m-5)}{(m+1)(m-6)}}$

$-\overset{6}{m}[E^2]$ (21.)

$\overset{6}{\mathfrak{S}}_{V} = \frac{A^6G}{B^7} - \overset{6}{6}_{V}$, $\quad \overset{6}{6}_{V} = \frac{8A^7CG}{B^9} - \overset{6}{7}_{V}$, $\quad \overset{6}{7}_{V} = \frac{45A^8C^2G}{B^{11}} - \overset{6}{8}_{V}$, $\quad \overset{6}{8}_{V} = \frac{220A^9C^3G}{B^{13}} - \overset{6}{9}_{V}$, $\quad \overset{6}{9}_{V} = \frac{1001A^{10}C^4G}{B^{15}} - \overset{6}{10}_{V}$, $\quad \overset{6}{10}_{V} = \frac{4368A^{11}C^5G}{B^{17}} - \overset{6}{11}_{V}$, $\quad \overset{6}{11}_{V} = \dots - \overset{6}{12}_{V}$

Quotienten: $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5\frac{5}{8}}$, $\frac{1}{4\frac{8}{9}}$, $\frac{1}{4\frac{1}{20}}$, $\frac{1}{4\frac{4}{11}}$, $\frac{1}{4\frac{1}{4}}$, … $\frac{1}{\frac{(2m-4)(2m-5)}{(m+1)(m-5)}}$

$-\overset{6}{m}[G]$ (26.)

$\overset{7}{\mathfrak{S}} = \frac{273A^{11}D^5}{B^{16}} + \overset{7}{11}$, $\quad \overset{7}{11} = \dots + \overset{7}{12}$

Quotienten: $\frac{1}{22\frac{2}{3}}$, … $\frac{1}{\frac{(2m-5)(2m-6)}{(m+1)(m-10)}}$

$+\overset{7}{m}[1]$ (6.)

$\overset{7}{\mathfrak{S}}_{II} = \frac{286A^{10}D^3E}{B^{14}} + \overset{7}{10}_{II}$, $\quad \overset{7}{10}_{II} = \frac{5460A^{11}CD^3E}{B^{16}} + \overset{7}{11}_{II}$, $\quad \overset{7}{11}_{II} = \dots + \overset{7}{12}_{II}$

Quotienten: $\frac{1}{19\frac{1}{11}}$, $\frac{1}{11\frac{1}{3}}$, … $\frac{1}{\frac{(2m-5)(2m-6)}{(m+1)(m-9)}}$

$+\overset{7}{m}[E]$ (11.)

$\overset{7}{\mathfrak{S}}_{III} = \frac{55A^9D^2F}{B^{12}} + \overset{7}{9}_{III}$, $\quad \overset{7}{9}_{III} = \frac{858A^{10}CD^2F}{B^{14}} + \overset{7}{10}_{III}$, $\quad \overset{7}{10}_{III} = \frac{8190A^{11}C^2D^2F}{B^{16}} + \overset{7}{11}_{III}$, $\quad \overset{7}{11}_{III} = \dots + \overset{7}{12}_{III}$

Quotienten: $\frac{1}{15\frac{3}{5}}$, $\frac{1}{9\frac{6}{11}}$, $\frac{1}{7\frac{5}{9}}$, … $\frac{1}{\frac{(2m-5)(2m-6)}{(m+1)(m-8)}}$

$+\overset{7}{m}[F]$ (17.)

$\overset{7}{\mathfrak{S}}_{IV} = \frac{55A^9DE^2}{B^{12}} + \overset{7}{9}_{IV}$, $\quad \overset{7}{9}_{IV} = \frac{858A^{10}CDE^2}{B^{14}} + \overset{7}{10}_{IV}$, $\quad \overset{7}{10}_{IV} = \frac{8190A^{11}C^2D^2E^2}{B^{16}} + \overset{7}{11}_{IV}$, $\quad \overset{7}{11}_{IV} = \dots + \overset{7}{12}_{IV}$

Quotienten: $\frac{1}{15\frac{3}{5}}$, $\frac{1}{9\frac{6}{11}}$, $\frac{1}{7\frac{5}{9}}$, … $\frac{1}{\frac{(2m-5)(2m-6)}{(m+1)(m-8)}}$

$+\overset{7}{m}[E^2]$ (22.)

$\overset{7}{\mathfrak{S}}_{V} = \frac{9A^8DG}{B^{10}} + \overset{7}{8}_{V}$, $\quad \overset{7}{8}_{V} = \frac{110A^9CDG}{B^{12}} + \overset{7}{9}_{V}$, $\quad \overset{7}{9}_{V} = \frac{858A^{10}C^2DG}{B^{14}} + \overset{7}{10}_{V}$, $\quad \overset{7}{10}_{V} = \frac{5460A^{11}C^3DG}{B^{16}} + \overset{7}{11}_{V}$, $\quad \overset{7}{11}_{V} = \dots + \overset{7}{12}_{V}$

Quotienten: $\frac{1}{12\frac{2}{9}}$, $\frac{1}{7\frac{4}{5}}$, $\frac{1}{6\frac{4}{11}}$, $\frac{1}{5\frac{2}{3}}$, … $\frac{1}{\frac{(2m-5)(2m-6)}{(m+1)(m-7)}}$

$+\overset{7}{m}[G]$ (27.)

$\overset{7}{\mathfrak{S}}_{VI} = \frac{9A^8EF}{B^{10}} + \overset{7}{8}_{VI}$, $\quad \overset{7}{8}_{VI} = \frac{110A^9CEF}{B^{12}} + \overset{7}{9}_{VI}$, $\quad \overset{7}{9}_{VI} = \frac{858A^{10}C^2EF}{B^{14}} + \overset{7}{10}_{VI}$, $\quad \overset{7}{10}_{VI} = \frac{5460A^{11}C^3EF}{B^{16}} + \overset{7}{11}_{VI}$, $\quad \overset{7}{11}_{VI} = \dots + \overset{7}{12}_{VI}$

Quotienten: $\frac{1}{12\frac{2}{9}}$, $\frac{1}{7\frac{4}{5}}$, $\frac{1}{6\frac{4}{11}}$, $\frac{1}{5\frac{2}{3}}$, … $\frac{1}{\frac{(2m-5)(2m-6)}{(m+1)(m-7)}}$

$+\overset{7}{m}[2EF]$ (31.)

$\overset{7}{\mathfrak{S}}_{VII} = \frac{A^7H}{B^8} + \overset{7}{7}_{VII}$, $\quad \overset{7}{7}_{VII} = \frac{9A^8CH}{B^{10}} + \overset{7}{8}_{VII}$, $\quad \overset{7}{8}_{VII} = \frac{55A^9C^2H}{B^{12}} + \overset{7}{9}_{VII}$, $\quad \overset{7}{9}_{VII} = \frac{286A^{10}C^3H}{B^{14}} + \overset{7}{10}_{VII}$, $\quad \overset{7}{10}_{VII} = \frac{1365A^{11}C^4H}{B^{16}} + \overset{7}{11}_{VII}$, $\quad \overset{7}{11}_{VII} = \dots + \overset{7}{12}_{VII}$

Quotienten: $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{6\frac{1}{9}}$, $\frac{1}{5\frac{1}{5}}$, $\frac{1}{4\frac{17}{22}}$, $\frac{1}{4\frac{8}{15}}$, … $\frac{1}{\frac{(2m-5)(2m-6)}{(m+1)(m-7)}}$

$+\overset{7}{m}[H]$ (36.)

u. s. w.

147. Es folgt aus (143. 1.):

$$1)\quad \frac{\mathfrak{C}.\ \overset{p}{m}[\mathfrak{Y}]}{\mathfrak{C}.\ \overset{p}{\widetilde{m+1}}[\mathfrak{Y}]} = \frac{1}{\frac{(2m-p+2)(2m-p+1)}{(m+1)(m-2p+\beta-\alpha+2)}}$$

wenn man allgemein unter $\mathfrak{C}.\ \overset{p}{m}[\mathfrak{Y}]$ den Coefficienten von $\overset{p}{m}[\mathfrak{Y}]$ versteht.

Nach dieser Formel sind in (146. 3.) die Formeln für die Coefficienten-Quotienten der Vertikalreihen bestimmt, indem jedesmal für p, β und α die zugehörigen Werthe gesetzt wurden.

Aus letzteren Formeln ergeben sich dann die Coefficienten-Quotienten der einzelnen Glieder, welche in (146. 2.) vertikal aufwärts zwischen die entsprechenden Glieder angeschrieben sind.

Es ist klar, daß mittelst dieser gehörig bestimmten Coefficienten-Quotienten die Coefficienten der folgenden Glieder leicht bestimmt werden können, wenn man den Coefficienten des zuletzt bestimmten Gliedes durch den betreffenden Coefficienten-Quotienten dividirt.

Diese Coefficienten-Quotienten (146. 2.) sind, wie die zugehörigen Formeln, so dargestellt, daß nur ihre Nenner die veränderliche Größe enthalten. Da diese Nenner bei manchen Vertikalreihen ab- und wieder zunehmen (bei der Quotientenreihe der Vertikalreihe $\overset{3}{m}[1]$ findet sich z. B.: $3\frac{8}{9} > 3\frac{31}{35} < 3\frac{39}{44}$), so müssen sich zwei um eine Einheit verschiedene Werthe für m finden lassen, für welche sich **gleiche** Nenner ergeben. Um diese Werthe von m zu bestimmen, haben wir nur nöthig, in dem Nenner des allgemeinen Coefficienten-Quotienten (m + 1) für m zu schreiben und die so veränderte Größe der ursprünglichen gleich zu setzen. Man erhält:

$$2)\quad \frac{(2m-p+2)(2m-p+1)}{(m+1)(m-2p+\beta-\alpha+2)} = \frac{(2m-p+4)(2m-p+3)}{(m+2)(m-2p+\beta-\alpha+3)}$$

und hieraus:

$$3)\quad m = -\tfrac{1}{2} + \frac{p^2+5p-4\beta+4\alpha-6 \pm \sqrt{(3p-2\beta+2\alpha-2)^2p^2+(3p-2\beta+2\alpha-2)p(2p-2\beta+2\alpha-3)+(2p-2\beta+2\alpha-3)^2}}{-4p+4\beta-4\alpha+6}\ ^{*)}$$

wodurch sich zwei Werthe für m ergeben.

148. Es liegt in der Natur der Sache, daß der Größe m (147. 3.) nur positive Werthe $> 2p - \beta + \alpha - 1$ (115. 2.) entsprechen und daß gefundene positive Werthe $< 2p - \beta + \alpha - 1$, oder negative Werthe, zu verwerfen sind. Nun läßt es sich leicht nachweisen, daß, wenn man unter dem Wurzelzeichen (147. 3.) die Größe

$$-3(3p-2\beta+2\alpha-2)\,p\,(2p-2\beta+2\alpha-3)$$

addirt, hierdurch die Größe unter dem Wurzelzeichen eine Verminderung für jeden gehörigen Werth von p, α und β erleidet.

Da die Wurzelgröße selbst durch diesen Kunstgriff rational gemacht wird, so geht die Gleichung (147. 3.), in Bezug auf das negative Vorzeichen der Wurzelgröße hierdurch über in die Ungleichung:

$$1)\quad m < -\tfrac{1}{2} + \frac{-2p^2+9p+(2p-6)(\beta-\alpha)-9}{-4p+4\beta-4\alpha+6}$$ oder, die Division ausgeführt: $2)\ m < \frac{p-4}{2}$. Nun ist aber:

$3)\ \frac{p-4}{2} < 2p - \beta + \alpha - 1.$ Daher um so mehr: $4)\ m < 2p - \beta + \alpha - 1.$

Hieraus geht hervor, daß das negative Vorzeichen der Wurzelgröße (147. 3.) gänzlich zu verwerfen ist und daß mithin dieser Formel nur ein einziger Werth für m entspricht.

149. Um zu untersuchen, für welche Werthe von p positive Resultate für m erhalten werden, wollen wir zuerst den Nenner $-4p + 4\beta - 4\alpha + 6$ in besonderen Betracht ziehen.

Man erhält alsbald als Bedingung seines positiven Werthes:

$1)\ 4\beta - 4\alpha + 6 > 4p$ oder: $2)\ \beta - \alpha + \frac{3}{2} > p.$

Wir haben bereits (108. 1.) gesehen, daß der kleinste Werth von $p = \beta$ sei.

---

*) Aus der Differenzialgleichung $d\,\frac{(2m-p+2)(2m-p+1)}{(m+1)(m-2p+\beta-\alpha+2)} = 0$ ergibt sich:

$$m = \frac{p^2+5p-4\beta+4\alpha-6 \pm \sqrt{(3p-2\beta+2\alpha-2)^2p^2+(3p-2\beta+2\alpha-2)p(2p-2\beta+2\alpha-3)}}{-4p+4\beta-4\alpha+6}$$ als Maximum oder Minimum.

…n dieser Darstellung bedeuten die unter die Vorzeichen der entwickel…n Glieder angeschriebenen Zahlen, die Werthe der entwickelten Glieder …nach 103.), bei welchen der Werth für $p = 1$ und $q = 1$ nicht angeschrieben ist, und die zwischen die Vertikalreihen angeschriebenen Bruchreihen enthalten die Coefficienten-Quotienten der bezüglichen Glieder. Außerdem ist dem ersten Gliede der Entwickelung sein Summenzeichen unterschrieben und die Summenzeichen der Vertikalreihen sind denselben überschrieben.

$$\overset{6}{S}_{III} = \frac{8 A^7 D F}{B^9} - \frac{90 A^8 C D F}{B^{11}} - \frac{660 A^9 C^2 D F}{B^{13}} - \frac{4004 A^{10} C^3 D F}{B^{15}} - \frac{21840 A^{11} C^4 D F}{B^{17}} - \ldots$$

Unterschriften: $\overset{6}{7}_{III}$, $\overset{6}{8}_{III}$, $\overset{6}{9}_{III}$, $\overset{6}{10}_{III}$, $\overset{6}{11}_{III}$, $\overset{6}{12}_{III}$

Quotienten: $\frac{1}{11\frac{1}{4}}$, $\frac{1}{7\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{6\frac{1}{15}}$, $\frac{1}{5\frac{5}{11}}$, $\frac{1}{5\frac{1}{10}}$; $\frac{(2m-5)}{(m-7)}$ … $\frac{1}{\frac{(2m-4)(2m-\ldots)}{(m+1)(m-\ldots)}}$

$$\overset{7}{S}_{VI} = \frac{9 A^8 E F}{B^{10}} + \frac{110 A^9 C E F}{B^{12}} + \frac{858 A^{10} C^2 E F}{B^{14}} + \frac{5460 A^{11} C^3 E F}{B^{16}} + \ldots$$

Unterschriften: $\overset{7}{8}_{VI}$, $\overset{7}{9}_{VI}$, $\overset{7}{10}_{VI}$, $\overset{7}{11}_{VI}$, $\overset{7}{12}_{VI}$

Quotienten: $\frac{1}{12\frac{2}{9}}$, $\frac{1}{7\frac{4}{5}}$, $\frac{1}{6\frac{4}{11}}$, $\frac{1}{5\frac{2}{3}}$; $\frac{1}{\frac{(\ldots m-5)(2m-6)}{(\ldots+1)(m-7)}}$

$$\overset{7}{S}_{VII} = \frac{A^7 H}{B^8} + \frac{9 A^8 C H}{B^{10}} + \frac{55 A^9 C^2 H}{B^{12}} + \frac{286 A^{10} C^3 H}{B^{14}} + \frac{1365 A^{11} C^4 H}{B^{16}} + \ldots$$

Unterschriften: $\overset{7}{7}_{VII}$, $\overset{7}{8}_{VII}$, $\overset{7}{9}_{VII}$, $\overset{7}{10}_{VII}$, $\overset{7}{11}_{VII}$, $\overset{7}{12}_{VII}$

Quotienten zwischen $\overset{7}{S}_{VI}$ und $\overset{7}{S}_{VII}$: $\frac{1}{12\frac{2}{9}}$, $\frac{1}{7\frac{4}{5}}$, $\frac{1}{6\frac{4}{11}}$, $\frac{1}{5\frac{2}{3}}$; $\frac{1}{\frac{(2m-5)(2m-6)}{(m+1)(m-7)}}$

Quotienten rechts von $\overset{7}{S}_{VII}$: $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{6\frac{1}{9}}$, $\frac{1}{5\frac{1}{5}}$, $\frac{1}{4\frac{17}{22}}$, $\frac{1}{4\frac{8}{15}}$; $\frac{1}{\frac{(2m-5)(2m-6)}{(m+1)(m-7)}}$

$- \overset{6}{m}\,[F]$ (16.) $+ \overset{7}{m}\,[2EF]$ (31.) $+ \overset{7}{m}\,[H]$ (36.)

147. C…

1) $\frac{C.\frac{p}{m}[\ldots}{C.\frac{p}{m+1}\ldots}$ …positive ganze … für …

Nach dies… ganze Werthe jedesmal für p, …

Aus letzte…) bezieht sich aufwärts zwisch… -1, welcher

Es ist kla… des zweiten bestimmt werden … tienten dividirt.

Diese Coe… änderliche Größ… Vertikalreihen, der Vertikalreihe… m finden lassen, … dem Nenner des … lichen gleich zu …

… es sich nun

2) $\frac{(2m-p-\ldots}{(m+1)(m\ldots}$ …enen Bruches … positiv ist, so

3) $m = -$ … en der ersten

wodurch sich zw…

148. C…

(115. 2.) entspr… nen Bruches Nun läßt es sic… erth von m … ihen nehmen addirt, hierdurch …

Da die … auf das negativ…

1) $m < -$ … in Formel

3) $\frac{p-4}{2} <$ …

Hieraus … dieser Formel …

149. U…

Nenner — 4p …

Man erhä…

1) …

Wir habe…

*) Aus der The… (146.)

$m = \frac{p^2 \ldots}{\ldots}$ … ganze Zahlen … ir ungerade

s folgt aus (143. 1.):

$$\frac{\ldots]}{\ldots[\mathfrak{Y}]} = \frac{1}{\frac{(2m-p+2)(2m-p+1)}{(m+1)(m-2p+\beta-\alpha+2)}}$$ wenn man allgemein unter $\mathfrak{C}.\overset{p}{m}[\mathfrak{Y}]$ den Coefficienten von $\overset{p}{m}[\mathfrak{Y}]$ versteht.

r Formel sind in (146. 3.) die Formeln für die Coefficienten-Quotienten der Vertikalreihen bestimmt, indem β und α die zugehörigen Werthe gesetzt wurden.

ren Formeln ergeben sich dann die Coefficienten-Quotienten der einzelnen Glieder, welche in (146. 2.) vertikal n die entsprechenden Glieder angeschrieben sind.

r, daß mittelst dieser gehörig bestimmten Coefficienten-Quotienten die Coefficienten der folgenden Glieder leicht können, wenn man den Coefficienten des zuletzt bestimmten Gliedes durch den betreffenden Coefficienten-Quo-

fficienten-Quotienten (146. 2.) sind, wie die zugehörigen Formeln, so dargestellt, daß nur ihre Nenner die ver-e enthalten. Da diese Nenner bei manchen Vertikalreihen ab- und wieder zunehmen (bei der Quotientenreihe $\overset{3}{m}[1]$ findet sich z. B.: $3\frac{3}{5} > 3\frac{3}{3}\frac{1}{6} < 3\frac{2}{4}\frac{2}{4}$), so müssen sich zwei um eine Einheit verschiedene Werthe für für welche sich gleiche Nenner ergeben. Um diese Werthe von m zu bestimmen, haben wir nur nöthig, in allgemeinen Coefficienten-Quotienten (m + 1) für m zu schreiben und die so veränderte Größe der ursprüng-setzen. Man erhält:

$$\frac{\ldots+2)(2m-p+1)}{\ldots-2p+\beta-\alpha+2)} = \frac{(2m-p+4)(2m-p+3)}{(m+2)(m-2p+\beta-\alpha+3)}$$ und hieraus:

$$\ldots\frac{1}{2} + \frac{p^2+5p-4\beta+4\alpha-6 \pm \sqrt{(3p-2\beta+2\alpha-2)^2p^2+(3p-2\beta+2\alpha-2)p(2p-2\beta+2\alpha-3)+(2p-2\beta+2\alpha-3)^2}}{-4p+4\beta-4\alpha+6}\ ^{*)}$$

ei Werthe für m ergeben.

s liegt in der Natur der Sache, daß der Größe m (147. 3.) nur positive Werthe $> 2p - \beta + \alpha - 1$ echen und daß gefundene positive Werthe $< 2p - \beta + \alpha - 1$, oder negative Werthe, zu verwerfen sind. h leicht nachweisen, daß, wenn man unter dem Wurzelzeichen (147. 3.) die Größe

$$-3(3p-2\beta+2\alpha-2)p(2p-2\beta+2\alpha-3)$$

die Größe unter dem Wurzelzeichen eine Verminderung für jeden gehörigen Werth von p, α und β erleidet. Wurzelgröße selbst durch diesen Kunstgriff rational gemacht wird, so geht die Gleichung (147. 3.), in Bezug e Vorzeichen der Wurzelgröße hierdurch über in die Ungleichung:

$\frac{1}{2} + \frac{-2p^2+9p+(2p-6)(\beta-\alpha)-9}{-4p+4\beta-4\alpha+6}$ oder, die Division ausgeführt: 2) $m < \frac{p-4}{2}$. Nun ist aber:

$2p - \beta + \alpha - 1.$ Daher um so mehr: 4) $m < 2p - \beta + \alpha - 1.$

geht hervor, daß das negative Vorzeichen der Wurzelgröße (147. 3.) gänzlich zu verwerfen ist und daß mithin ur ein einziger Werth für m entspricht.

m zu untersuchen, für welche Werthe von p positive Resultate für m erhalten werden, wollen wir zuerst den $\ldots + 4\beta - 4\alpha + 6$ in besonderen Betracht ziehen.

ilt alsbald als Bedingung seines positiven Werthes:

$4\beta - 4\alpha + 6 > 4p$ oder: 2) $\beta - \alpha + \frac{3}{2} > p.$

n bereits (108. 1.) gesehen, daß der kleinste Werth von $p = \beta$ sei.

---

ifferenzialgleichung $d\,\frac{(2m-p+2)(2m-p+1)}{(m+1)(m-2p+\beta-\alpha+2)} = 0$ ergibt sich:

$$\frac{\ldots-5p-4\beta+4\alpha-6 \pm \sqrt{(3p-2\beta+2\alpha-2)^2p^2+(3p-2\beta+2\alpha-2)p(2p-2\beta+2\alpha-3)}}{-4p+4\beta-4\alpha+6}$$ als Maximum oder Minimum.

Setzen wir $\beta \leqq p$, etwa $\beta + k = p$, wo k selbstverständlich, wie die Größen β und p, nur eine positive ganze Zahl bedeutet, oder gleich Null ist, so folgt:

3) $-\alpha + \frac{3}{2} > k$ oder: 4) $\frac{3}{2} > k + \alpha$.

Wir sehen aus dieser Ungleichung, daß sich zur Bestimmung von k und α nur sehr wenige positive ganze Werthe ergeben.

5) Setzen wir $k = 0$ und $\alpha = 0$, so ist $\beta = 2$ (111. 6.), daher auch $p = 2$ und die Formel (147. 3.) bezieht sich auf die Vertikalreihe des zweiten Grades. Es wird aber für diese zusammengehörigen Werthe $m = -1$, welcher Werth zu verwerfen ist. Hieraus ergibt sich: die Nenner der Coefficienten-Quotienten der Vertikalreihen des zweiten Grades nehmen fortwährend zu und es ist:

$$\lim. \frac{2(2m-1)}{m+1} = 4.$$

Setzen wir $k = 1$, so folgt (aus 4.) $\alpha = 0$ und man erhält $\beta = 2$ und $p = 3$.

6) Setzen wir $\alpha = 1$, so folgt $k = 0$ und die Formel (147. 3.) bezieht sich dann auf diejenigen Vertikalreihen, für welche

$$[\mathfrak{D}] = 1, E, F, G, H, \ldots.$$
$$\beta = 3, 4, 5, 6, 7, \ldots.$$

und $p = \beta$

ist, also auf jede erste Vertikalreihe correspondirender Reihen der ersten Klasse aller Grade (114. 2.). Da es sich nun leicht nachweisen läßt, daß für diese zusammengehörigen Werthe auch der Zähler des in Betrachtung gezogenen Bruches (147. 3.), mit Bezugnahme auf das positive Vorzeichen der Wurzelgröße, und so auch der Werth von m positiv ist, so kann man sagen: Die Nenner der Coefficienten-Quotienten jeder ersten Vertikalreihe correspondirender Reihen der ersten Classe aller Grade nehmen bis zu einer gewissen Größe ab, dann wieder zu und es ist:

$$\lim. \frac{(2m-n+2)(2m-n+1)}{(m+1)(m-n+1)} = 4.$$

7) Da es sich ferner nachweisen läßt, daß, für $p > \beta$ und $\alpha > 1$, der Zähler des in Betrachtung gezogenen Bruches (147. 3.) stets positiv und sein Nenner stets negativ wird, und diese Voraussetzungen für einen positiven Werth von m nicht stattfinden können, so erhält man: die Nenner der Coefficienten-Quotienten aller übrigen Vertikalreihen nehmen beständig ab und es ist für dieselben

$$\lim. \frac{(2m-p+2)(2m-p+1)}{(m+1)(m-2p+\beta-\alpha+2)} = 4.$$

150. Substituirt man die zusammengehörigen Werthe, nämlich 1 für α und n für p und β (114. 3.) in Formel (147. 3.); so geht dieselbe über in

1) $$m = \frac{(n+1)n - 3 + \sqrt{n^4+n^2+1}}{2}$$

Hiernach ist:

für $n = 3$	$m = 4{,}5 + \frac{1}{2}\sqrt{91}$	$= 9{,}269 \ldots$
„ $n = 4$	$m = 8{,}5 + \frac{1}{2}\sqrt{273}$	$= 16{,}761 \ldots$
„ $n = 5$	$m = 13{,}5 + \frac{1}{2}\sqrt{651}$	$= 26{,}257 \ldots$
„ $n = 6$	$m = 19{,}5 + \frac{1}{2}\sqrt{1333}$	$= 37{,}755 \ldots$
„ $n = 7$	$m = 26{,}5 + \frac{1}{2}\sqrt{2451}$	$= 51{,}253 \ldots$
	u. s. w.	

d. h. es liegt der kleinste Nenner der Coefficienten-Quotienten der Vertikalreihen, deren allgemeine Glieder sind:

$\overset{3}{m}[1]$	$\overset{4}{m}[E]$	$\overset{5}{m}[F]$	$\overset{6}{m}[G]$	$\overset{7}{m}[H]$	...
zwischen der 9. u. 10.	17. u. 18.	26. u. 27.	38. u. 39.	51. u. 52.	... Horizontalreihe (146.)

Wir sehen, daß die Formel (in 1.) für m interpolirte Zahlen liefert. Legen wir einen Werth darauf, ganze Zahlen für m zu erhalten, so haben wir die Wurzelgröße dieser Formel rational zu machen und wir berücksichtigen, daß für ungerade n die Werthe zu groß, für gerade n zu klein gefunden wurden.

Subtrahirt / Addirt $\Big\}$ man unter dem Wurzelzeichen $\left\{\begin{matrix} n^2+1 \\ n^2 \end{matrix}\right\}$, so ergibt sich:

für ungerade n

2) $m = \frac{2n^2+n-3}{2}$

für gerade n

3) $m = \frac{2n^2+n-2}{2}$

Daher für jeden positiven ganzen Werth von n 4) $m = \frac{4n^2+2n-5+(-1)^n}{4}$.

Bezeichnet $\mathfrak{N}$ den Werth des kleinsten Nenners, so erhält man denselben, wenn man den (in 4.) modulirten Werth von m für m in den Coefficienten von AC (143. 1.) substituirt und daselbst n für p und β, und 1 für α schreibt. Es ergibt sich:

5) $$\mathfrak{N} = \frac{4[4n^2-1+(-1)^n][4n^2-3+(-1)^n]}{[4n^2+2n-1+(-1)^n][4n^2-2n-1+(-1)^n]}$$

151. Aus den in (146.) berechneten Coefficienten-Quotienten geht hervor, daß sich für die Quotienten der Glieder $\frac{\overset{3}{5}}{\underset{}{\overset{3}{6}}}$, $\frac{\overset{4}{9}[E]}{\overset{4}{10}[E]}$, ... der Coefficienten-Quotient $\frac{1}{4}$ ergibt, welches derjenige ist, dem sich (nach 144. 1.) alle Vertikalreihen bei einer sehr großen Gliederzahl immer mehr und mehr nähern. Wollte man nun die Frage aufwerfen, bei welchen Vertikalreihen sich der Coefficienten-Quotient $\frac{1}{4}$ auch bei den anfänglichen Gliedern ergibt, so haben wir nur nöthig, den Coefficienten des Nenners, in (143. 1.) gleich 4 zu setzen, woraus sich findet:

1) $$m = \frac{p^2+5p-4\beta+4\alpha-6}{-4p+4\beta-4\alpha+6}$$

und für welchen Werth von m die Betrachtung (149.) Anwendung findet. Daher erhält man, daß sich nur für die ersten Vertikalreihen correspondirender Reihen der ersten Klasse aller Grade bei den anfänglichen Gliedern Coefficienten-Quotienten gleich $\frac{1}{4}$ ergeben.

Substituirt man nun wieder die zusammengehörigen Werthe, nämlich 1 für α und n für p und β (114. 3.) in obige Formel, so geht dieselbe über in:

2) $$m = \frac{(n+1)\,n-2}{2}$$

Ist nun n = 3, 4, 5, 6, ... so erhält man für m diejenigen Werthe, welche für m in (150. 1.) gefunden wurden, wenn man daselbst die Wurzelgröße in Abzug bringt, dagegen 0,5 addirt. Es ergibt sich daher der Coefficienten-Quotient $\frac{1}{4}$ bei den Vertikalreihen, deren allgemeine Glieder sind:

$\overset{3}{m}[1]$ $\quad\overset{4}{m}[E]$ $\quad\overset{5}{m}[F]$ $\quad\overset{6}{m}[G]$ $\quad\overset{7}{m}[H]$ ...

durch Division der Coefficienten der Glieder: $\frac{\overset{3}{5}[1]}{\overset{3}{6}[1]}$ $\quad\frac{\overset{4}{9}[E]}{\overset{4}{10}[E]}$ $\quad\frac{\overset{5}{14}[F]}{\overset{5}{15}[F]}$ $\quad\frac{\overset{6}{20}[G]}{\overset{6}{21}[G]}$ $\quad\frac{\overset{7}{27}[H]}{\overset{7}{28}[H]}$ ...

152. Wenn man sich die Ungleichung $B^2 > 4\,AC$ so klein wie möglich denkt, so wollen wir dafür schreiben: $B^2 = 4\,AC$ und diese Gleichung als die kleinste Ungleichung betrachten, für welche wir auch (nach 135. 3.) schreiben können: $1 = 4z$. Nun ist aber (nach 135. 6.)

$\overset{II}{S} + 1 - 2z = 1 - (\frac{1}{2}) . 4z + (\frac{1}{2})_2 . 4^2 z^2 - (\frac{1}{2})_3 . 4^3 z^3 + ... = (1-4z)^{1/2}$. Daher für unsere Annahme:

1) $(1-4z)^{1/2} = 0$; 2) $0 = 1 - (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})_2 - (\frac{1}{2})_3 + ...$ und es folgt:

3) $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{5}{128} + ...$ eine convergente Reihe.

4) Hieraus geht hervor, daß die Vertikalreihe des zweiten Grades schon bei der kleinsten Ungleichung

$B^2 = 4\,AC$ oder für die Bedingung $\lim. \frac{\overset{2}{m}[1]}{\overset{2}{\widetilde{m+1}}[1]} = 1$

convergirt, sowie daß die Bedingung ihrer Convergenz indentisch ist mit der Bedingung für die Möglichkeit der Wurzelgröße $(1-4z)^{1/2}$.

5) Mit Berücksichtigung von (142. 3. und 4.) läßt sich somit auch die Convergenz aller übrigen Vertikalreihen durch die Bedingung

$$B^2 > 4\,AC \quad \text{d. h. für die Bedingung} \quad \lim.\ \frac{\overset{p}{m}[\mathfrak{Y}]}{\overbrace{m+1}^{p}[\mathfrak{Y}]} > 1$$

feststellen, und es folgt weiter:

6) daß die Vertikalreihe des zweiten Grades schneller convergire, wie alle übrigen Vertikalreihen.

II. Horizontales Abnehmen der correspondirenden Reihen.

153.

1) Wenn, ohne das Vorzeichen genommen, ein Glied irgend einer Vertikalreihe einer Hauptgruppe größer ist, wie ein mit ihm in derselben Horizontalreihe stehendes, also mit demselben Exponenten von A behaftetes, Glied einer Vertikalreihe einer folgenden Hauptgruppe, so wollen wir beide Glieder horizontal abnehmend nennen.

2) Läßt es sich insbesondere nachweisen, daß bei correspondirenden Reihen das dritte Glied jeder vorhergehenden Vertikalreihe größer sei, wie das erste Glied der folgenden Vertikalreihe (114. 1.), so nennen wir die correspondirenden Reihen in ihren ersten Gliedern horizontal abnehmend.

154. Dividirt man das allgemeine Glied jeder Vertikalreihe correspondirender Reihen (116. 1.) durch sein horizontal-folgendes (116. 7.), so ergibt sich für zwei horizontal aufeinander folgende Glieder zweier Vertikalreihen correspondirender Reihen der Quotient:

$$1)\quad \frac{\overbrace{\mu+2p-\beta+\alpha-2}^{p}[\mathfrak{Y}]}{\overbrace{(\mu-2)+2p-\beta+\alpha}^{p+1}[\mathfrak{Y}]} = \frac{(2\mu+3p-2\beta+2\alpha-4)\,(p-\beta+1)}{(\mu-1)\,(\mu-2)} \cdot \frac{C^2}{BD}$$

und beide Glieder sind horizontal abnehmend, wenn

$$2)\quad (2\mu+3p-2\beta+2\alpha-4)\,(p-\beta+1)\,.\,C^2 > (\mu-1)\,(\mu-2)\,.\,BD$$

ist. Diese Ungleichung wird um so größer, je größer p, und um so kleiner, je größer μ wird. Denkt man sich μ so groß, daß die übrigen Summanden gegen μ als verschwindend klein betrachtet werden können, so geht dieselbe über in:

$$3)\quad 2\,(p-\beta+1)\,.\,C^2 > \mu\,.\,BD,$$

welche Ungleichung immer kleiner wird, je größer man μ annimmt. Es wird sich daher stets (B und D $\gtrless$ o gedacht) ein Werth $\mu_1 > \mu$ ergeben, für welchen sie übergeht in:

$$4)\quad 2\,(p-\beta+1)\,.\,C^2 < \mu_1\,.\,BD.$$

Hieraus geht hervor, daß, wenn auch zwei aufeinander folgende Vertikalreihen correspondirender Reihen anfänglich horizontal abnehmen, sie doch stets später für hohe Werthe von μ wieder horizontal zunehmen und es läßt sich, die Convergenz jeder Vertikalreihe vorausgesetzt, folgern, daß, wenn für sehr hohe Werthe von μ die Glieder der folgenden Vertikalreihe unendlich klein von der k^ten^ Ordnung, die Glieder der vorhergehenden Vertikalreihe unendlich klein von der (k + 1)^ten^ Ordnung sind.

155. Wenn man die Gleichung (116. 4.) durch die Gleichung (116. 6.) dividirt, oder in (154. 1.) $\mu = 3$ setzt, so ergibt sich:

$$1)\quad \frac{\overbrace{3+2p-\beta+\alpha-2}^{p}[\mathfrak{Y}]}{\overbrace{1+2p-\beta+\alpha}^{p+1}[\mathfrak{Y}]} = \frac{(3p-2\beta+2\alpha+2)\,(p-\beta+1)}{2} \cdot \frac{C^2}{BD}$$

und die correspondirenden Reihen sind in ihren ersten Gliedern horizontal abnehmend, wenn der erhaltene Quotient ein unächter Bruch ist. In diesem Falle ist:

$$2)\quad (3p-2\beta+2\alpha+2)\,(p-\beta+1)\,.\,C^2 > 2BD.$$

156. Ist für diese Ungleichung:

1) $[\mathfrak{Y}] = 1,$ nämlich $\alpha = 0$ und $\beta = 2,$ so ist $(3p-2)(p-1)C^2 > 2BD,$

2) oder $\alpha = 1$ „ $\beta = 3,$ „ „ $(3p-2)(p-2)C^2 > 2BD,$

3) $[\mathfrak{Y}] = E,$ nämlich $\alpha = 1$ „ $\beta = 4,$ „ „ $(3p-4)(p-3)C^2 > 2BD,$

4) $[\mathfrak{Y}] = F,$ „ $\alpha = 1$ „ $\beta = 5,$ „ „ $(3p-6)(p-4)C^2 > 2BD,$

u. s. w.,

aus welchen Formeln hervorgeht, daß für $p = \beta = 2$ und $[\mathfrak{Y}] = 1$ die kleinste Ungleichung, nämlich:

4) $$2C^2 > BD$$

stattfindet und daß also, wenn diese Ungleichung stattfindet, die übrigen noch mehr stattfinden; d. h. findet diese Ungleichung statt, so nehmen alle Vertikalreihen correspondirender Reihen in ihren ersten Gliedern horizontal ab und es ist:

5) $$\overbrace{3+2p-\beta+\alpha-2}^{p}[\mathfrak{Y}] > \overbrace{1+2p-\beta+\alpha}^{p+1}[\mathfrak{Y}].$$

157. Es sei (155. 2.), (unter der Voraussetzung $C \gtrless 0$),

1) $$(3p-2\beta+2\alpha+2)(p-\beta+1)C^2 < 2BD$$

so folgt, substituirt man für p immer größere und größere Werthe, so daß endlich die übrigen Summanden als verschwindend klein gegen p betrachtet werden können:

2) $$3p^2 . C^2 < 2BD,$$

welche Ungleichung immer kleiner wird, je größer man p annimmt. Es wird sich daher stets ein Werth $p_1 > p$ ergeben, für welchen

3) $$3p_1^2 . C^2 > 2BD$$

ist. Daher kann man sagen: Für hohe Stellenzahlen der Hauptgruppen nehmen die correspondirenden Reihen in ihren ersten Gliedern stets horizontal ab, oder es ist, für große Werthe von p, stets

4) $$\overbrace{3+2p-\beta+\alpha-2}^{p}[\mathfrak{Y}] > \overbrace{1+2p-\beta+\alpha}^{p+1}[\mathfrak{Y}].$$

III. Staffelförmige Convergenz der correspondirenden Reihen.

158.

1) Wenn, ohne das Vorzeichen genommen, ein Glied irgend einer Vertikalreihe einer Hauptgruppe größer ist, wie ein, in einer der folgenden Horizontalreihen stehendes, Glied einer folgenden Hauptgruppe, so sagen wir: beide Glieder nehmen staffelförmig ab.

2) Läßt es sich insbesondere nachweisen, daß bei correspondirenden Reihen das erste (oder zweite) Glied einer vorhergehenden Reihe größer sei, wie das erste Glied der folgenden, so nennen wir die correspondirenden Reihen für das erste (oder zweite) Glied der Vertikalreihen staffelförmig abnehmend.

159. Wenn man die Gleichung (116. 2.) durch die Gleichung (116. 6.) dividirt, so ergibt sich:

1) $$\frac{\overbrace{1+2p-\beta+\alpha-2}^{p}[\mathfrak{Y}]}{\overbrace{1+2p-\beta+\alpha}^{p+1}[\mathfrak{Y}]} = \frac{(2p-\beta+\alpha+1)(2p-\beta+\alpha)(p-\beta+1) . B^3}{(3p-2\beta+2\alpha+1)(3p-2\beta+2\alpha)(3p-2\beta+2\alpha-1) . A^2D}$$

und die correspondirenden Reihen sind für das erste Glied staffelförmig abnehmend, wenn der erhaltene Quotient ein unächter Bruch ist. In diesem Falle hat man:

2) $$B^3 > \frac{(3p-2\beta+2\alpha+1)(3p-2\beta+2\alpha)(3p-2\beta+2\alpha-1)}{(2p-\beta+\alpha+1)(2p-\beta+\alpha)(p-\beta+1)} . A^2D$$

Wenn man in 1) der Größe p beständig größere und größere Werthe beilegt, so werden endlich die übrigen Summanden der Coefficienten als verschwindend klein gegen p betrachtet werden können und die Formel geht über in:

3) $$\lim.\ \frac{\overbrace{1+2p-\beta+\alpha-2}^{p}[\mathfrak{y}]}{\overbrace{1+2p-\beta+\alpha}^{p+1}[\mathfrak{y}]} = \frac{4B^3}{27A^2D}.$$

Dieser Quotient gibt uns das Mittel an die Hand, die staffelförmige Convergenz der correspondirenden Reihen für die ersten Glieder ihrer Vertikalreihen festzustellen. Betrachten wir nämlich die ersten Glieder aller Vertikalreihen einer correspondirenden Reihe der Ordnung nach als zusammengehörige Reihenglieder und vergleichen sie mit den Gliedern der Vertikalreihe des zweiten Grades für sehr hohe Werthe von m, so sehen wir, daß, weil für letztere noch Convergenz für die Bedingung

$\lim.\ \dfrac{\overset{2}{m}\,[1]}{\overbrace{m+1}^{2}[1]} = 1$ (152. 4.) stattfindet, staffelförmige Convergenz der correspondirenden Reihen für die ersten Glieder ihrer Vertikalreihen besteht bei der Bedingung:

4) $\lim.\ \dfrac{\overbrace{1+2p-\beta+\alpha-2}^{p}[\mathfrak{y}]}{\overbrace{1+2p-\beta+\alpha}^{p+1}[\mathfrak{y}]} > 1$ nämlich bei der Bedingung: 5) $4B^3 > 27A^2D$.

160. Ist (159. 2.)

1) $$B^3 < \frac{(3p-2\beta+2\alpha+1)(3p-2\beta+2\alpha)(3p-2\beta+2\alpha-1)}{(2p-\beta+\alpha+1)(2p-\beta+\alpha)(p-\beta+1)}\,.\,A^2D,$$

und denkt man sich für $\dfrac{(3p-2\beta+2\alpha)(3p-2\beta+2\alpha-1)}{2p-\beta+\alpha}$ den größeren Werth $\dfrac{B^2}{AC}$ aus (143. 4.) gesetzt, so ist auch:

2) $$(2p-\beta+\alpha+1)(p-\beta+1)BC < (3p-2\beta+2\alpha+1)AD\ ^{*}).$$

Legt man nun p einen so großen Werth bei, daß gegen ihn die übrigen Summanden als verschwindend klein betrachtet werden können, so folgt:

3) $$2p\,.\,BC < 3AD.$$

Diese Ungleichung wird immer kleiner, je größer man p annimmt, daher geht sie endlich (für $p' > p$ und B und C $\gtrless 0$ gedacht) über in:

4) $$2p'\,.\,BC > 3AD$$

Folglich kann man sagen: Nehmen die Vertikalreihen der correspondirenden Reihen anfänglich vertikal ab, aber dabei für das erste Glied staffelförmig zu, so nehmen sie doch später stets für das zweite Glied staffelförmig ab.

161. Es läßt sich leicht zeigen, daß, wenn

1) $$2BC > 3AD$$ ist, die Ungleichung

2) $$(2p-\beta+\alpha+1)(p-\beta+1)BC > (3p-2\beta+2\alpha+1)\,.\,AD$$

noch um so mehr stattfindet. Folglich kann man sagen: Findet die Ungleichung 1) statt, so ist das zweite Glied jeder Vertikalreihe correspondirender Reihen stets größer, wie das erste Glied der folgenden, nämlich immer:

$$\overbrace{2+2p-\beta+\alpha-2}^{p}[\mathfrak{y}] > \overbrace{1+2p-\beta+\alpha}^{p+1}[\mathfrak{y}]$$

oder die correspondirenden Reihen nehmen, die Ungleichung 1) vorausgesetzt, für das zweite Glied stets staffelförmig ab.

---

*) Diese Ungleichung ergibt sich auch, $\overbrace{2+2p-\beta+\alpha-2}^{p}[\mathfrak{y}] < \overbrace{1+2p-\beta+\alpha}^{p+1}[\mathfrak{y}]$ gedacht, wenn man die Gleichung (116. 3.) durch die Gleichung (116. 6.) dividirt.

162. Ist 1) $2BC > 3AD$,

und 2) $B^2 \overset{=}{>} \frac{9}{4}AC$,

so folgt: 3) $4B^3 > 27A^2D$.

Die beiden ersten Ungleichungen schließen daher immer die letzte, nämlich die Bedingung (159. 5.), ein.

Von dem Anschlusse der, in den einzelnen Hauptgruppen neu zuwachsenden, correspondirenden Reihen (114. 4.) an Vertikalreihen der vorhergehenden Hauptgruppen.

163. Fassen wir die Resultate der bisherigen Untersuchungen für die Eigenschaften der entwickelten Reihen noch einmal zusammen, so erhalten wir, anschließend an (102. 114. und 118.):

1) Sämmtliche Vertikalreihen convergiren, wenn die Bedingung stattfindet

$$B^2 > 4AC \qquad (152.\ 5.)$$

und zwar um so mehr, je größer diese Ungleichung ist.

2) Die Vertikalreihen einer und derselben correspondirenden Reihe convergiren nicht alle gleich stark, sondern es convergiren die vorhergehenden Vertikalreihen stärker, als die folgenden. (152. 6. und 154. 4.)

3) Die ersten Glieder der anfänglichen Vertikalreihen correspondirender Reihen nehmen, wenn die Bedingung (143. 4.) stattfindet, stets ab, dagegen nehmen die der späteren zu; die Vertikalreihen sind daher, unter der Voraussetzung (143. 4.), anfänglich durchaus abnehmende, dann später in ihren ersten Gliedern zunehmende, convergente Reihen.

4) Die correspondirenden Reihen sind, für die Bedingung $2C^2 > BD$, stets in ihren ersten Gliedern (156.), und, für die Bedingung $2C^2 < BD$, ($C \gtrless 0$ gedacht), bei hohen Stellenzahlen der Hauptgruppen in ihren ersten Gliedern horizontal abnehmend. (157. 4.)

5) Die correspondirenden Reihen convergiren bei der Bedingung $4B^3 > 27A^2D$ für die ersten Glieder der Vertikalreihen staffelförmig. (159. 5.)

6) Convergiren sämmtliche Vertikalreihen und convergiren die correspondirenden Reihen für die ersten Glieder ihrer Vertikalreihen staffelförmig, so ist das erste Glied der ersten Vertikalreihe aller correspondirenden Reihen größer, wie jedes andere Glied der betreffenden correspondirenden Reihe.

7) Das Gesetz der Convergenz der correspondirenden Reihen beruht also einzig und allein auf dem gegenseitigen Verhältniß der Coefficienten A, B, C und D.

164. Da indessen die entwickelten Vertikalreihen aus einer unendlichen Anzahl correspondirender Reihen bestehen, so ist das Convergenzgesetz zwar auf jede correspondirende Reihe für sich anwendbar, es bleibt aber noch das Verhalten neu zuwachsender correspondirender Reihen, bezüglich ihres Anschlusses an die Vertikalreihen vorhergehender Hauptgruppen, zu untersuchen übrig. Wir werden in dieser Beziehung damit ausreichen, wenn wir das erste Glied der ersten Vertikalreihe einer neu zuwachsenden correspondirenden Reihe (163. 6.) mit dem ersten Gliede einer geeigneten Vertikalreihe der vorhergehenden Hauptgruppe vergleichen, weil dann im Uebrigen alle bisher gezogenen Schlüsse für die neu zuwachsende correspondirende Reihe Gültigkeit haben. Ist nun das erste Glied der ersten Vertikalreihe einer neu zuwachsenden correspondirenden Reihe kleiner, wie das erste Glied einer bezüglichen Vertikalreihe der vorhergehenden Hauptgruppe, so sind wir gewiß, daß, wenn überhaupt aus dem Verhältniß der gegebenen Coefficienten A, B, C und D die Convergenz-Bedingungen der einzelnen correspondirenden Reihen erhellen und das erste Glied der bezüglichen Vertikalreihe der vorhergehenden Hauptgruppe auf die verlangte Genauheit des zu bestimmenden Resultates keinen Einfluß hat, auch der Werth des ersten Gliedes der ersten Vertikalreihe der neu zuwachsenden correspondirenden Reihe auf die verlangte Genauheit des zu bestimmenden Resultates keinen Einfluß ausübt, und

daß dieß auch wegen der vertikalen und der für die ersten Glieder der Vertikalreihen staffelförmigen Convergenz der correspondirenden Reihen mit dem Werthe der ganzen correspondirenden Reihen der Fall ist.

Ist aber das erste Glied der ersten Vertikalreihe der neu zuwachsenden correspondirenden Reihe größer, wie das erste Glied der bezüglichen Vertikalreihe der vorhergehenden Hauptgruppe, so ist die Vernachlässigung der neu zuwachsenden correspondirenden Reihe, beziehungsweise ihrer anfänglichen Glieder, auf die verlangte Genauheit des Resultates entweder von Einfluß oder nicht, und ist in speciellen Fällen hierüber zu entscheiden.

Es geht hieraus die Nothwendigkeit hervor, allgemein festzustellen, unter welchen Bedingungen stets das erste Glied der ersten Vertikalreihe neu zuwachsender correspondirender Reihen kleiner sei, wie das erste Glied einer Vertikalreihe der vorhergehenden Hauptgruppe, und hierbei ist vorerst zu untersuchen, mit welchen Vertikalreihen der vorhergehenden Hauptgruppen die ersten Vertikalreihen neu zuwachsender correspondirender Reihen, beziehungsweise deren erste Glieder, am zweckmäßigsten zu vergleichen sind.

165. Zum Zwecke dieser Untersuchung wollen wir das Schema (109.) einer weiteren Betrachtung unterwerfen.

Dividirt man in demselben jeden zweiten Polynomial-Faktor einer jeden Horizontalspalte durch den dritten, den dritten durch den vierten, den vierten durch den fünften u. s. w.; so ist, bezeichnet [$\mathfrak{Z}$] jedesmal den folgenden Polynomial-Faktor, wenn [$\mathfrak{Y}$] den vorhergehenden ausdrückt, stets:

1) $$\frac{[\mathfrak{Y}]}{[\mathfrak{Z}]} = \text{einem der Quotienten: } \frac{E}{F},\ \frac{F}{G},\ \frac{G}{H},\ \frac{H}{I}\ \ldots.$$

wobei, wenn für [$\mathfrak{Y}$] die Stellenzahl β (108. 1.) entspricht, $\beta + 1$ die Stellenzahl für [$\mathfrak{Z}$] bezeichnet, der Werth von α aber für beide Polynomial-Faktoren derselbe bleibt.

Dividirt man nun die Gleichung (116. 2.) durch die Gleichung (117. 1.), so ergibt sich:

2) $$\frac{\overbrace{1+2p-\beta+\alpha-2}^{p}[\mathfrak{Y}]}{\overbrace{1+2p-\beta+\alpha-1}^{p+1}[\mathfrak{Z}]} = \frac{2p-\beta+\alpha}{3p-2\beta+2\alpha-1}\cdot\frac{B[\mathfrak{Y}]}{A[\mathfrak{Z}]}$$ also ist für abnehmende Glieder:

3) $$(2p-\beta+\alpha)B\ .\ [\mathfrak{Y}] > (3p-2\beta+2\alpha-1)A\ .\ [\mathfrak{Z}].$$

Diese Ungleichung findet aber, weil $\beta - \alpha$ eine positive Größe bedeutet, immer statt, wenn

4) $$2B[\mathfrak{Y}] > 3A[\mathfrak{Z}]$$ ist.

166. Wenn man in diese Ungleichung die Werthe aus (165. 1.) nach und nach substituirt, so ergeben sich die Ungleichungen:

2BE > 3AF 2BF > 3AG 2BG > 3AH 2BH > 3AI u. s. w.	und finden daher diese Ungleichungen statt, so nimmt jedes erste Glied der ersten [2ten, 3ten, 4ten . . . ($p-\beta+1$)ten] Vertikalreihe neuer correspondirender Reihen in Bezug auf ein ihm bezügliches erstes Glied einer Vertikalreihe der vorhergehenden Hauptgruppe staffelförmig ab, wenn man unter diesen neuen correspondirenden Reihen solche versteht, welche nicht mit einem, sich unter den beiden ersten Polynomial-Faktoren einer jeden Horizontalspalte des Schemas (109.) befindlichen, Polynomial-Faktor behaftet sind,

weil bei der gegenwärtigen Untersuchung nur die übrigen Polynomial-Faktoren, nämlich alle von einschließlich dem dritten jeder Horizontalspalte an gerechnet, durch die Größe [$\mathfrak{Z}$] dargestellt wurden.

167. Es ist aber nothwendig, daß für unsere Untersuchung auch die beiden ersten Polynomial-Faktoren jeder Horizontalspalte in dieser Weise durch [$\mathfrak{Z}$] dargestellt werden.

Wählen wir nun unter den beiden ersten Polynomial-Faktoren jeder Horizontalspalte des Schemas (109.) für [$\mathfrak{Y}$] und [$\mathfrak{Z}$] zwei Werthe dergestalt, daß, wenn dem Polynomial-Factor [$\mathfrak{Y}$] die kleinste Stellenzahl der Hauptgruppen, nämlich β, entspricht, dem Polynomial-Faktor [$\mathfrak{Z}$] die Stellenzahl $\beta + 2$ zukommt, dabei zugleich α in $\alpha + 1$ übergeht, so erhalten wir, wenn wir die Gleichung (116. 2.) durch die Gleichung (117. 2.) dividiren:

1) $$\frac{\overbrace{1+2p-\beta+\alpha-2}^{p}[\mathfrak{V}]}{\overbrace{1+2p-\beta+\alpha-1}^{p+1}[\mathfrak{B}]} = \frac{(2p-\beta+\alpha)(\alpha+1)}{(3p-2\beta+2\alpha-1)(p-\beta)} \cdot \frac{BD}{A} \cdot \frac{[\mathfrak{V}]}{[\mathfrak{B}]}.$$

Da wir hier das Glied in $[\mathfrak{B}]$ mit dem Gliede in $[\mathfrak{V}]$ der unmittelbar vorhergehenden Hauptgruppe vergleichen, so ist hierfür $\beta = p-1$, und wenn man diesen Werth von β in die vorhergehende Gleichung substituirt, so erhält man:

2) $$\frac{\overbrace{1+p+\alpha-1}^{p}[\mathfrak{V}]}{\overbrace{1+p+\alpha}^{p+1}[\mathfrak{B}]} = \frac{(p+\alpha+1)(\alpha+1)}{p+2\alpha+1} \cdot \frac{BD}{A} \cdot \frac{[\mathfrak{V}]}{[\mathfrak{B}]}$$

168. Setzt man nach und nach:

1) $p = 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots$

$\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots = \frac{p-3}{2}$; so wird:

$\frac{[\mathfrak{V}]}{[\mathfrak{B}]} = \frac{1}{E},\ \frac{E}{E^2},\ \frac{E^2}{E^3},\ \frac{E^3}{E^4},\ \ldots = \frac{1}{E}$

Substituirt man nun diese zusammengehörigen Werthe in (167. 2.), so geht diese Gleichung über in:

2) $$\frac{\overbrace{1+\frac{3p}{2}-\frac{5}{2}}^{p}[\mathfrak{V}]}{\overbrace{1+\frac{3p}{2}-\frac{3}{2}}^{p+1}[\mathfrak{B}]} = \frac{3p-1}{8} \cdot \frac{BD}{AE},$$ daher ist für staffelförmig abnehmende Glieder:

3) $$(3p-1)\,BD > 8AE.$$

Diese Ungleichung wird um so größer, je größer man p annimmt. Die kleinste Ungleichung findet statt für $p = 3$, woraus sich ergibt:

4) $$BD > AE.$$

Findet daher diese Ungleichung statt, so finden alle übrigen noch mehr statt, und es ist:

$$\overset{3}{3}[1] > \overset{4}{4}[E];\ \overset{5}{6}[E] > \overset{6}{7}[E^2];\ \overset{7}{9}[E^2] > \overset{8}{10}[E^3] \text{ u. s. w. } \overbrace{1+\frac{3p}{2}-\frac{5}{2}}^{p}[E^{\frac{p-3}{2}}] > \overbrace{1+\frac{3p}{2}-\frac{3}{2}}^{p+1}[E^{\frac{p-1}{2}}].$$

169. Setzt man nach und nach:

1) $p = 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \ldots$

$\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots = \frac{p-4}{2}$, so wird:

$\frac{[\mathfrak{V}]}{[\mathfrak{B}]} = \frac{1F}{2EF},\ \frac{2EF}{3E^2F},\ \frac{3E^2F}{4E^3F},\ \frac{4E^3F}{5E^4F},\ \ldots = \frac{\alpha}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{E} = \frac{p-4}{p-2} \cdot \frac{1}{E}.$

Substituirt man diese zusammengehörigen Werthe in (167. 2.), so geht diese Gleichung über in:

2) $$\frac{\overbrace{1+\frac{3p}{2}-3}^{p}[\mathfrak{V}]}{\overbrace{1+\frac{3p}{2}-2}^{p+1}[\mathfrak{B}]} = \frac{(3p-2)(p-4)}{4(2p-3)} \cdot \frac{BD}{AE},$$ daher ist für staffelförmig abnehmende Glieder:

3) $$(3p-2)(p-4)\,BD > 4(2p-3)\,AE$$

Diese Ungleichung wird um so größer, je größer man p annimmt. Die kleinste Ungleichung findet statt für $p = 6$, woraus sich ergibt:

4) $$8BD > 9AE.$$

Findet daher diese Ungleichung statt, so finden alle übrigen noch mehr statt und es ist:

$$\overset{6}{7}\,[F] > \overset{7}{8}\,[2EF];\quad \overset{8}{10}\,[2EF] > \overset{9}{11}\,[3E^2F];\quad \overset{10}{13}\,[3E^2F] > \overset{11}{14}\,[4E^3F];\quad \ldots .$$

$$\overbrace{1+\frac{3p}{2}-3}^{p.}\left[\left(\frac{p}{2}-2\right)E^{\frac{p-6}{2}}F\right] > \overbrace{1+\frac{3p}{2}-2}^{p+1}\left[\left(\frac{p}{2}-1\right)E^{\frac{p-4}{2}}F\right].$$

170. Setzt man nach und nach:

1) $p = \quad 9, \quad 11, \quad 13, \quad 15, \quad \ldots$

$\alpha = \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \ldots = \frac{p-5}{2}$, so wird:

$$\frac{[\mathfrak{Y}]}{[\mathfrak{Z}]} = \frac{2_2F^2}{3_2EF^2},\quad \frac{3_2E\,F^2}{4_2E^2F^2},\quad \frac{4_2E^2F^2}{5_2E^3F^2},\quad \frac{5_2E^3F^2}{6_2E^4F^2},\quad \ldots = \frac{\alpha_2}{(\alpha+1)_2}\cdot\frac{1}{E} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{E} = \frac{p-7}{p-3}\cdot\frac{1}{E}.$$

Substituirt man diese zusammengehörigen Werthe in (167. 2.), so geht diese Gleichung über in:

2) $$\frac{\overbrace{1+\frac{3p}{2}-\frac{7}{2}}^{p}[\mathfrak{Y}]}{\overbrace{1+\frac{3p}{2}-\frac{5}{2}}^{p+1}[\mathfrak{Z}]} = \frac{(3p-3)(p-7)}{4(2p-4)}\cdot\frac{BD}{AE},$$ daher ist für staffelförmig abnehmende Glieder:

3) $$(3p-3)(p-7)\,.\,BD > 4\,(2p-4)\,AE.$$

Diese Ungleichung wird um so größer, je größer man p annimmt. Die kleinste Ungleichung findet statt für $p = 9$, woraus sich ergibt:

4) $$6BD > 7AE.$$

Findet daher diese Ungleichung statt, so finden alle übrigen noch mehr statt.

u. s. w.

171. In gleicher Weise ergibt sich allgemein, daß

1) $p = \quad 3r-6, \quad 3r-4, \quad 3r-2, \quad 3r, \quad \ldots = 2\alpha + r$

$\alpha = \quad r-3, \quad r-2, \quad r-1, \quad r, \quad \ldots = \frac{p-r}{2}$

$$\frac{[\mathfrak{Y}]}{[\mathfrak{Z}]} = \frac{(r-3)_{r-3}\,.\,F^{r-3}}{(r-2)_{r-3}\,.\,EF^{r-3}},\quad \frac{(r-2)_{r-3}\,.\,E\,F^{r-3}}{(r-1)_{r-3}\,.\,E^2F^{r-3}},\quad \frac{(r-1)_{r-3}\,.\,E^2F^{r-3}}{r_{r-3}\,.\,E^3F^{r-3}},\quad \frac{r_{r-3}\,.\,E^3F^{r-3}}{(r+1)_{r-3}\,.\,E^4F^{r-3}},\ \ldots$$

$$= \frac{\alpha_{r-3}\,.\,E^{\alpha-r+3}F^{r-3}}{(\alpha+1)_{r-3}\,.\,E^{\alpha-r+4}F^{r-3}} = \frac{\alpha-r+4}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{E} = \frac{p-3r+8}{p-r+2}\cdot\frac{1}{E}$$

zusammengehörige Werthe sind, in welchen r nach und nach in die Größen 3, 4, 5, 6, ... übergeht.

Substituirt man diese zusammengehörigen Werthe in (167. 2.), so erhält man:

2) $$\frac{\overbrace{1+\frac{3p}{2}-\frac{r+2}{2}}^{p}[\mathfrak{Y}]}{\overbrace{1+\frac{3p}{2}-\frac{r}{2}}^{p+1}[\mathfrak{Z}]} = \frac{(3p-r+2)(p-3r+8)}{4(2p-r+1)}\cdot\frac{BD}{AE},$$ daher ist für staffelförmig abnehmende Glieder:

3) $$(3p-r+2)\,(p-3r+8)\,.\,BD > 4\,(2p-r+1)\,.\,AE.$$

Diese Ungleichung wird um so größer, je größer man p annimmt. Die kleinste Ungleichung findet statt für $p = 3r-6$, woraus sich ergibt:

4) $$(4r-8)\,.\,BD > (5r-11)\,.\,AE.$$

Findet daher diese Ungleichung statt, so finden alle übrigen noch mehr statt und es ist:

$$\overbrace{1+4r-10}^{3r-6}\,[F^{r-3}] > \overbrace{1+4r-9}^{3r-5}\,[(r-2)\,.\,EF^{r-3}],$$ nämlich:

$$\overset{3}{3}\,[1] > \overset{4}{4}\,[E]; \quad \overset{6}{7}\,[F] > \overset{7}{8}\,[2EF]; \quad \overset{9}{11}\,[F^2] > \overset{10}{12}\,[3EF^2]; \quad \overset{12}{15}\,[F^3] > \overset{13}{16}\,[4EF^3];$$ u. s. w.,

wenn man r nach und nach = 3, 4, 5, 6, ... setzt.

172. Läßt man r auf diese Weise fortgesetzt wachsen, so erhält man aus (171. 4.) als Grenze die Bedingung

1) $$4BD > 5AE$$

und findet diese Ungleichung statt, so finden alle übrigen noch mehr statt.

Um jedoch diese Ungleichung mit den Ungleichungen (166.) und der (161. 1.) in Einklang zu bringen, wollen wir die kleinere Ungleichung

2) $$4BD > 6AE \quad \text{nämlich} \quad 2BD > 3AE$$

später (175. 3.) als Bedingung unterstellen: wenn diese stattfindet, so findet die Ungleichung (171. 4.), beziehungsweise (171. 3.), noch um so mehr statt.

173. Dieser Betrachtung können in Schema (109.) alle Polynomial-Faktoren unterworfen werden, welche die beiden ersten jeder Horizontalspalte sind und zwar können hierbei alle, welche selbst $E^{\alpha-r+3}$ als Faktor enthalten (E^0 ausgeschlossen), einmal durch $[\mathfrak{J}]$ ausgedrückt werden.

Diejenigen dieser Polynomial-Faktoren aber, welche den Faktor $E^{\alpha-r+3}$ nicht enthalten, werden hierbei stets nur durch $[\mathfrak{Y}]$ ausgedrückt. Es findet sich aber für diese, wenn man sie durch $[\mathfrak{J}]$ ausdrücken will, stets in einer vorhergehenden Vertikalspalte ein, bereits durch $[\mathfrak{J}]$ ausgedrückt gewesener, Polynomial-Faktor, der nun durch $[\mathfrak{Y}]$ ausgedrückt, für:

$$\frac{[\mathfrak{Y}]}{[\mathfrak{J}]} \text{ einen der Quotienten: } \frac{kE}{F},\quad \frac{kF}{G},\quad \frac{kG}{H},\quad \frac{kH}{I}\ \ldots$$

liefert, in welcher Darstellung k jedesmal irgend einen Zahlen-Coefficienten bezeichnet oder gleich Eins ist.

Hiernach fallen aber diese, den Faktor $E^{\alpha-r+3}$ nicht habenden, Polynomial-Faktoren der ersten und zweiten Stelle jeder Horizontalspalte in die Kategorie (165. 1.), wodurch nunmehr alle Polynomial-Faktoren ohne Ausnahme einmal durch $[\mathfrak{J}]$ ausgedrückt sind.

Von der Möglichkeit der Ungleichungen, welche nothwendig sind, durch das Umkehrungsverfahren convergente Reihen zu erhalten.

174. Bringt man eine gegebene, reelle Wurzeln enthaltende, Gleichung von der Form:

1) $$0 = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 + \ldots.$$

nach (22. bis 29.) auf die Form:

2) $$0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots.$$

so läßt sich die Behauptung aufstellen, daß durch eine solche Transformirung stets die Ungleichung $B^2 > 4AC$ erzielt werden könne, und es kann dieselbe auf folgende Weise allgemein eingesehen werden. Es sei:

3) $$0 = a + by + cy^2 + y^3$$

eine gegebene cubische Gleichung und $-\overset{1}{w}$, $-\overset{2}{w}$, $-\overset{3}{w}$ seien die drei Wurzeln derselben, so läßt sich diese Gleichung bekanntlich folgendermaßen durch ihre Wurzeln ausdrücken:

4) $$0 = \overset{1}{w}\overset{2}{w}\overset{3}{w} + (\overset{1}{w}\overset{2}{w} + \overset{1}{w}\overset{3}{w} + \overset{2}{w}\overset{3}{w})\,y + (\overset{1}{w} + \overset{2}{w} + \overset{3}{w})\,y^2 + y^3.$$

Bezeichnet nun $-w$ einen nahen Werth einer der drei Wurzeln, etwa der Wurzel $-\overset{3}{w}$, und substituirt man denselben für u (nach 29.), nämlich $-w + x$ für y, in 4), so geht diese Gleichung über in:

5) $0 = (\overset{1}{w} - w)(\overset{2}{w} - w)(\overset{3}{w} - w) + [(\overset{1}{w} - w)(\overset{2}{w} - w) + (\overset{1}{w} - w)(\overset{3}{w} - w) + (\overset{2}{w} - w)(\overset{3}{w} - w)] \,.\, x$

$$+ [(\overset{1}{w} - w) + (\overset{2}{w} - w) + (\overset{3}{w} - w)] \,.\, x^2 + x^3.$$

Setzt man der Kürze halber:

$\overset{1}{w} - w = \overset{1}{\mathfrak{W}}$; $\quad \overset{2}{w} - w = \overset{2}{\mathfrak{W}}$; $\quad \overset{3}{w} - w = \overset{3}{\mathfrak{W}}$; so ist:

6) $$0 = \underset{A}{\overset{1}{\mathfrak{W}}\overset{2}{\mathfrak{W}}\overset{3}{\mathfrak{W}}} + \underset{B}{[\overset{1}{\mathfrak{W}}\overset{2}{\mathfrak{W}} + (\overset{1}{\mathfrak{W}} + \overset{2}{\mathfrak{W}})\overset{3}{\mathfrak{W}}]} \,.\, x + \underset{C}{(\overset{1}{\mathfrak{W}} + \overset{2}{\mathfrak{W}} + \overset{3}{\mathfrak{W}})} \,.\, x^2 + \underset{D}{x^3}.$$

Da nun der Werth von w dem Werthe von $\overset{3}{w}$ beliebig nahe gebracht, also der Werth $\overset{3}{\mathfrak{W}}$ beliebig klein erhalten werden kann, so lassen sich die Größen A, B, C auch stets so bestimmen, daß

7) $$[\overset{1}{\mathfrak{W}}\overset{2}{\mathfrak{W}} + (\overset{1}{\mathfrak{W}} + \overset{2}{\mathfrak{W}})\overset{3}{\mathfrak{W}}]^2 > 4\,\overset{1}{\mathfrak{W}}\overset{2}{\mathfrak{W}}\overset{3}{\mathfrak{W}}(\overset{1}{\mathfrak{W}} + \overset{2}{\mathfrak{W}} + \overset{3}{\mathfrak{W}})$$

nämlich $$B^2 > 4AC$$

ist; weil bei A die Größe $\overset{3}{\mathfrak{W}}$ als Faktor, bei C und B aber nur als Summand und Faktor eines Summanden erscheint.

8) Ganz ähnlich läßt sich der Beweis für die Möglichkeit der Ungleichung $B^2 > 4AC$ bei allen, reelle Wurzeln enthaltenden, Gleichungen höherer Grade, sowie für die Möglichkeit aller Ungleichungen führen, bei welchen die Größe A als Faktor auf der kleineren Seite des Ungleichheitszeichens erscheint.

9) In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß die Ungleichungen, in welchen A nicht als Faktor auf der kleineren Seite des Ungleichheitszeichens erscheint, nämlich in welchen der Faktor A gar nicht vorkommt, zwar stattfinden können, nicht aber bei einer beliebigen Verkleinerung von A nothwendig stattfinden müssen.

Anwendung des Umkehrungsverfahrens, beziehungsweise der Summenformeln, auf die Bestimmung der reellen Wurzeln der Gleichungen.

175. Ist für eine vorgelegte Gleichung von der Form:

$$0 = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 + \dots$$

ein annähernder Werth u für y bestimmt, so bringe man durch Substitution von u + x für y die Gleichung auf die Form:

$$0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \dots \qquad (29.)$$

so, daß hierfür die Bedingungen stattfinden:

1) $B^2 > \frac{3}{2}AC$	(162. 2.)	4) $2BE > 3AF$
2) $2BC > 3AD$	(162. 1.)	5) $2BF > 3AG$ (166.)
3) $2BD > 3AE$	(172. 2.)	6) $2BG > 3AH$

u. s. w.

Denkt man sich die Ausführung, eine unendliche Anzahl von Gliedern zu bestimmen, für möglich, so würde eine kleine Ungleichung bei der Bedingung $B^2 > \frac{3}{2}AC$ schon ausreichen zur Bestimmung einer jeden Vertikalreihe, und ebenso eine kleine Ungleichung bei jeder der übrigen Bedingungen zum abnehmenden Anschlusse jeder folgenden Vertikalreihe an die Summe aller vorhergehenden, also zur Bestimmung der Größe x.

Da es uns aber in der Ausführung darauf ankommt, die zu suchende Größe nur mit wenigen Gliedern zu bestimmen, so ist es nothwendig, diese Ungleichungen möglichst groß zu erhalten.

Auch hängt die Größe dieser Ungleichungen von dem Grade der Genauheit ab, bis zu welchem die Unbekannte bestimmt werden soll. Es muß daher die Ungleichung $B^2 > \frac{3}{2}AC$ so groß sein, daß schnell convergirende Vertikalreihen bestehen und diese daher in ihren ersten Gliedern schon rasch abnehmen.

176. Und hier ergibt sich wegen (145. 3.) für das Umkehrungsverfahren stets eine Grenze in seiner Anwendung.

Zur Bestimmung dieser Grenze, für welche nämlich die in ihren sämmtlichen Gliedern abnehmenden Vertikalreihen der correspondirenden Reihen in solche, in ihren Anfangsgliedern zunehmende, Vertikalreihen übergehen, sei:

1) $$\frac{AC}{B^2} = z \qquad \text{nämlich} \qquad \frac{1}{z} = \frac{B^2}{AC}.$$

Schreibt man nun p + 1 für p in den Coefficienten von AC (143. 4.), so muß $\frac{1}{z}$ zwischen den so veränderten und den ursprünglichen Coefficienten von AC fallen, d. h. es muß sein:

2) $$\begin{cases} \frac{1}{z} < \frac{(3p - 2\beta + 2\alpha + 3)(3p - 2\beta + 2\alpha + 2)}{2p - \beta + \alpha + 2} \\ \frac{1}{z} > \frac{(3p - 2\beta + 2\alpha)(3p - 2\beta + 2\alpha - 1)}{2p - \beta + \alpha} \end{cases}$$ Hieraus findet sich:

3) $$\begin{cases} p > \frac{4(\beta - \alpha) - 5}{6} + \frac{1}{9z} + \frac{1}{18}\sqrt{\left(\frac{2}{z}\right)^2 + (\beta - \alpha + 1)\cdot\frac{12}{z} + 9} \\ p < \frac{4(\beta - \alpha) + 1}{6} + \frac{1}{9z} + \frac{1}{18}\sqrt{\left(\frac{2}{z}\right)^2 + (\beta - \alpha + 1)\cdot\frac{12}{z} + 9} \end{cases}$$

Je größer sich hierbei p ergibt, desto schneller convergiren die Vertikalreihen und desto weniger Glieder hat man zur Bestimmung der Unbekannten bis zu einem verlangten Grade der Genauheit nöthig.

4) Da mittelst der vorhergehenden Formeln, weil die Größe unter dem Wurzelzeichen nie eine reine Quadratzahl ist, nur irrationale Werthe, und mithin für p interpolirte Zahlen, gefunden werden, wir aber ein Interesse daran haben, ganze Werthe für p zu erhalten, so kann man, wenn sich der angehängte Decimalbruch größer als 0,5 ergibt, denselben ganz weglassen und die Zahl um eine Einheit vermehren; ist aber der angehängte Decimalbruch kleiner als 0,5, denselben blos weglassen.

177. Es ergibt sich noch aus (176. 3.), daß man für $\beta - \alpha = 2$ den kleinsten Werth für p erhält, daß also die correspondirenden Reihen des dritten Grades (114. 5.) früher in ihren ersten Gliedern zunehmende Reihen liefern, wie die correspondirenden Reihen aller höheren Grade.

Für $\beta - \alpha = 2$ gehen die Ungleichungen (176. 3.) über in:

$$p > \frac{1}{2} + \frac{1}{9z} + \frac{1}{18}\sqrt{\left(\frac{2}{z}\right)^2 + \frac{36}{z} + 9}$$

$$p < \frac{3}{2} + \frac{1}{9z} + \frac{1}{18}\sqrt{\left(\frac{2}{z}\right)^2 + \frac{36}{z} + 9}$$

Ist daher eine vorgelegte Gleichung von einem höheren als dem dritten Grade, so dienen doch vorstehende Formeln zur Bestimmung der Grenze der Hauptgruppen, für welche noch stets in ihren Anfangsgliedern abnehmende convergirende Vertikalreihen erlangt werden.

178. Zur Bestimmung der Unbekannten x (175.) kann man sich nun der in der ersten Abtheilung angegebenen Methode (42.) bedienen, indem man gliedweise vorgeht, oder der in dieser Abtheilung berechneten Summenformeln, oder auch man kann beide Methoden mit einander verbinden, indem man die Summenformeln theilweise anwendet und den Rest gliedweise bestimmt. Um indessen diesen Rest bequem berechnen zu können, darf die Zahl seiner Ziffer die Grenze der Mantisse der Logarithmentafel nicht übersteigen. Es soll an einem numerischen Beispiele das Geeignete gezeigt werden (186.)

Bei dem Gebrauche der Summenformeln erstrecken sich sämmtliche Rechnungsoperationen auf das einmalige Ausziehen einer Quadratwurzel auf die Anzahl der Decimalstellen von der verlangten Genauheit der Wurzel und sodann auf die bloße Anwendung der s. g. vier Species.

Es kann übrigens hier nicht mehr darauf ankommen, *sämmtliche* Wurzeln einer vorgelegten Gleichung zu bestimmen, da hierüber das Nöthige in der ersten Abtheilung bereits abgehandelt ist. Es dürfte vielmehr die Bestimmung einer einzigen Wurzel einer gegebenen Gleichung hinreichen, die Richtigkeit der gefundenen Summenformeln und ihrer Anwendung durch Zahlenbeispiele nachzuweisen.

179. Lösung der Gleichung

$$0 = -5 - 2y + y^3 \qquad (62.)$$
$$\quad a \quad\; b \quad\; d$$

1) Da für diese Gleichung $c = 0$ ist, so wird der Bedingung (175. 2.) nicht entsprochen und es ist daher, bevor wir die Umkehrungsformel anwenden, eine Transformirung vorzunehmen.

Für $y = 2$ ist $\overset{2}{Z} = -\ 1$
„ $y = 3$ „ $\overset{3}{Z} = +16$

daher $u = 2$ nahe eine Wurzel der Gleichung; folglich nach (29.):

$$\begin{array}{l|llll|}
u = 2 & 0 = -5 & & & \\
u^2 = 4 & \quad\ -4 & -2 & .\,x & \\
u^3 = 8 & \quad\ +8 & +12 & +6.x^2 & +x^3 \\
\hline
 & 0 = -1 & +10x & +6.x^2 & +x^3 \\
 & \quad\ \ A & \ \ B & \ \ C & \ \ D
\end{array}$$

welche Gleichung den Bedingungen (175.) nunmehr entspricht.

2) Nach (176. 1.) ist, ohne Berücksichtigung der Vorzeichen, $\frac{1}{z} = \frac{100}{6} = 16\frac{2}{3}$, daher (nach 177.):

$4{,}65\ldots < p < 5{,}65\ldots$ oder (nach 176. 4.) $5 < p < 6$;

so daß also die Vertikalreihe $\overset{5}{m}$ [1] eine in ihren Anfangsgliedern noch abnehmende, dagegen die Reihe $\overset{6}{m}$ [1] eine in ihren Anfangsgliedern zunehmende, convergirende Reihe für unser Beispiel liefert.

3) Da hier die Zahl p die Grenze von (146. 2.) nicht übersteigt, so kann ihr Werth auch schon durch Vergleichung von $\frac{1}{z}$ $(= 16\frac{2}{3})$ mit den Nennern der Coefficienten-Quotienten der correspondirenden Reihen des dritten Grades gefunden werden. Es ist nämlich $13\frac{3}{4} < 16\frac{2}{3} < 18\frac{1}{5}$, woraus dasselbe hervorgeht.

4) Vergleichen wir $\frac{1}{z}$ mit den Nennern der anfänglichen Coefficienten-Quotienten der Reihe $\overset{6}{m}$ [1], so ergibt sich, daß $18\frac{1}{5} > 16\frac{2}{3} > 10\frac{10}{11}$ ist, daß also auch $\overset{6}{9} < \overset{6}{10} > \overset{6}{11} > \ldots$ und mithin $\overset{6}{10}$ das größte Glied der Reihe $\overset{6}{m}$ [1] für unser Beispiel ist. Mithin ist dasselbe dasjenige, welches zur Bestimmung, bis zu welcher Grenze die Wurzel durch die vorhergehenden Reihen gefunden wird, am meisten einwirkt. Man erhält aus:

$$\begin{aligned}
\log.\ 1001 &= 3{,}0004341 \\
\log.\ (A^{10}D^4) &= 0 \\
\log.\ C &= 0{,}7781513 \\
\text{d. E. } \log.\ B^{15} &= 0{,}0000000 - 15 \\
\hline
\log.\ \overset{6}{10} &= 0{,}7785854 - 12
\end{aligned}$$

daß der Werth von $\overset{6}{10}$ mit der 12. Decimalstelle beginnt.

Genügt uns daher eine Genauheit von 11 Decimalstellen, so können die gefundenen fünf Summenglieder in Anwendung gebracht werden.

180. Die Anwendung der Summenformeln ergibt:

$$\begin{aligned}
z &= -\tfrac{6}{100} = -0{,}06 && (134.\ 3.) \\
S &= +0{,}12 && (134.\ 5.) \\
1 + 2S &= +1{,}24 \\
(1+2S)^{1/2} &= +1{,}113552872566
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{11}{T} &= +0{,}113552872566 && (135.\ 10.) \\
\frac{B}{2C} &= +\tfrac{10}{12} \\
\overset{2}{\mathfrak{T}} &= +0{,}094627393805 && (135.\ 13.)
\end{aligned}$$

Wollen wir untersuchen, bis zu der wievielten Stelle genau der Werth $\overset{2}{\mathfrak{T}}$ mit dem Werthe von x übereinstimmt, so haben wir nur nöthig, den Werth von $\overset{3}{3}$ (146. 2.) zu bestimmen. Man erhält aus:

$$\begin{aligned}
\log.\ (A^3D) &= 0 \\
\text{d. E. } \log.\ B^4 &= 0{,}0000000 - 4 \\
\hline
\log.\ \overset{3}{3} &= 0{,}0000000 - 4
\end{aligned}$$

daß der Fehler mit der vierten Decimalstelle beginnt und daß die Wurzel, da $\overset{3}{3}$ negativ ist, zu groß gefunden ist. Es ergibt sich weiter:

$$\frac{S}{1+\overset{II}{T}} = + \frac{0{,}12}{1{,}113552872566}$$
$$= + 0{,}107763181216$$
$$\frac{2+\overset{II}{T}}{2} = + 1{,}056776436283$$
$$-\frac{S}{1+\overset{II}{T}} \cdot \frac{2+\overset{II}{T}}{2} = - 0{,}113881590608$$
$$\overset{II}{T} = + 0{,}113552872566$$
$$\overset{III}{S} = - 0{,}000328718042 \quad (136.\ 9.)$$

$$\frac{B^2D}{2C^3} = + \tfrac{100}{432}$$
$$\overset{3}{\mathfrak{S}} = - 0{,}000076092139 \quad (136.\ 10.)$$
$$\overset{2}{\mathfrak{T}} = + 0{,}094627393805$$
$$\overset{3}{\mathfrak{T}} = + 0{,}094551301666 \quad (133.\ 1.)$$

Wollen wir untersuchen, bis zu der wievielten Stelle genau der Werth $\overset{3}{\mathfrak{T}}$ mit dem Werthe von x übereinstimmt, so haben wir nur nöthig, den Werth von $\overset{4}{5}$ (146. 2.) zu bestimmen. Man erhält aus:

$$\log.\ 3 = 0{,}4771213$$
$$\log.\ (A^5D^2) = 0$$
$$\text{d. E. } \log.\ B^7 = 0{,}0000000 - 7$$
$$\log.\ \overset{4}{5} = 0{,}4771213 - 7$$

daß der Fehler mit der siebenten Decimalstelle beginnt und daß die Wurzel, da $\overset{4}{5}$ positiv ist, zu klein gefunden ist. Es ergibt sich weiter:

$$-\frac{S^2}{4(1+2S)} = -\frac{0{,}0144}{4{,}96}$$
$$= - 0{,}002903225806$$
$$\frac{\overset{II}{S}}{2} = - 0{,}003223563717 \quad (135.\ 9.)$$
$$\text{addirt: } = - 0{,}006126789523$$
$$-\frac{S}{1+\overset{II}{T}}\left[\frac{\overset{II}{S}}{2} - \frac{S^2}{4(1+2S)}\right] = + 0{,}000660242329$$
$$\overset{III}{2S} = - 0{,}000657436084$$
$$\overset{IV}{S} = + 0{,}000002806245 \quad (137.\ 10.)$$

$$\frac{B^3D^2}{2C^5} = \tfrac{1000}{15552}$$
$$\overset{4}{\mathfrak{S}} = + 0{,}000000180442 \quad (137.\ 11.)$$
$$\overset{3}{\mathfrak{T}} = + 0{,}094551301666$$
$$\overset{4}{\mathfrak{T}} = + 0{,}094551482108 \quad (133.\ 1.)$$

Wollen wir untersuchen, bis zu der wievielten Stelle genau der Werth $\overset{4}{\mathfrak{T}}$ mit dem Werthe von x übereinstimmt, so haben wir nur nöthig, den Werth von $\overset{5}{7}$ (146. 2.) zu bestimmen. Man erhält aus:

$$\log.\ 12 = 1{,}0791812$$
$$\log.\ (A^7D^3) = 0$$
$$\text{d. E. } \log.\ B^{10} = 0{,}0000000 - 10$$
$$\log.\ \overset{5}{7} = 0{,}0791812 - 9$$

daß der Fehler mit der neunten Decimalstelle beginnt und daß die Wurzel, da $\overset{5}{7}$ negativ ist, zu groß gefunden ist. Es ergibt sich weiter:

$$S^3 = + 0{,}001728$$
$$3S^3 = + 0{,}005184$$
$$+\frac{3S^3}{8(1+2S)^2} = + 0{,}000421436004$$
$$+\frac{S^2}{4(1+2S)} = + 0{,}002903225806$$
$$+\overset{II}{T}S = + 0{,}013626344708$$
$$\text{addirt: } = + 0{,}016951006518$$

$$\frac{S}{1+\overset{II}{T}}\left[\overset{II}{T}S + \frac{S^2}{4(1+2S)} + \frac{3S^3}{8(1+2S)^2}\right]$$
$$= + 0{,}001826694387$$
$$\overset{IV}{5S} = + 0{,}000014031225$$
$$\text{addirt: } = + 0{,}001840725612$$
$$5(1+S)\overset{III}{S} = - 0{,}001840821035$$
$$\overset{V}{S} = - 0{,}000000095423 \quad (139.\ 10.)$$
$$\frac{B^4D^3}{6C^7} = + \tfrac{10000}{1679616}$$

$\overset{5}{\mathfrak{S}} = -\ 0{,}000000000563$ (139. 11.)

$\overset{4}{\mathfrak{T}} = +\ 0{,}094551482108$

$\overset{5}{\mathfrak{T}} = +\ 0{,}09455148154\dot{5}$ (133. 1.)

auf 11 Decimalstellen genau. (179. 4.)

Es ist: $u = +\ 2$

mithin: $x = +\ 2{,}09455148154$

181. Genügte eine Genauheit von 11 Decimalstellen nicht, so ist man genöthigt, eine weitere Transformirung der transformirten Gleichung (179. 1.) vorzunehmen. Bestimmt man den ersten Näherungswerth nach (134. 1.), so erhält man:

$\mathfrak{S} = +\ 0{,}1$

$u = +\ 2$

$u' = +\ 2{,}1$

$u'^2 = +\ 4{,}41$

$u'^3 = +\ 9{,}261$

daher nach (29.)

$$\begin{array}{l} 0 = -\ 5 \\ \quad -\ 4{,}2 \\ \quad +\ 9{,}261 \end{array}\left.\begin{array}{l} \\ -\ 2 \\ +\ 13{,}23 \end{array}\right\} . x \quad +\ 6{,}3 . x^2 + x^3$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 = +\ 0{,}061 & +\ 11{,}23 . x & +\ 6{,}3 . x^2 & + x^3 \\ A & B & C & D \end{array}$$

und nun nach (176. 1.)

$\frac{1}{z} = 328{,}1627 \ldots.$

daher nach (177.) $73{,}922 \ldots < p < 74{,}922 \ldots$ oder nach (176. 4.) $74 < p < 75$;

so daß die Vertikalreihe $\overset{74}{m}$ [1] eine in ihren Anfangsgliedern noch abnehmende, dagegen die Vertikalreihe $\overset{75}{m}$ [1] eine in ihren Anfangsgliedern zunehmende convergirende Reihe für unser Beispiel liefert.

Will man untersuchen, bis zu wieviel Decimalstellen genau die Wurzel durch die fünf ersten Summenglieder bestimmt wird, so ergibt sich aus (146. 2.):

$\log. 55 = 1{,}7403627$

$\log. A^9 = 0{,}0679682 - 11$

$\log. D^4 = 0,$

d. E. $\log. B^{13} = 0{,}3450626 - 14$

$\log. \overset{6}{9} = 0{,}1533935 - 23$

daß der Werth von $\overset{6}{9}$ erst mit der 23. Decimalstelle beginnt, mithin die gegebene Gleichung mit Hülfe der fünf gefundenen Summenglieder auf 22 Decimalstellen genau bestimmt werden kann.

Genügte eine Genauheit von sieben Decimalstellen, so kann die Wurzel vorstehender Gleichung schon mittelst des Summengliedes $\overset{2}{\mathfrak{T}}$ bestimmt werden, wie aus dem Gliede $\overset{3}{3}$ (146. 2.) hervorgeht. Denn es ist:

$\log. A^3 = 0{,}3559894 - 4$

$\log. D = 0,$

d. E. $\log. B^4 = 0{,}7984808 - 5$

$\log. \overset{3}{3} = 0{,}1544702 - 8$

daher der Unterschied des genäherten und des wahren Werthes mit der achten Decimalstelle beginnt.

Die Rechnung ergibt:

$z = +\ \frac{0{,}061 . 6{,}3}{11{,}23^2} = +\ 0{,}003047269$ (134. 3.)

$1 - 4z = +\ 0{,}987810924$

$(1 - 4z)^{1/2} = +\ 0{,}993886775$

$\overset{II}{T} = (1 - 4z)^{1/2} - 1 = -\ 0{,}006113225$ (135. 10.)

$\frac{B}{2C} = +\ 0{,}891269841$

$\overset{2}{\mathfrak{T}} = -\ 0{,}00544853\dot{3}$ (135. 13.)

bis auf die achte Decimalstelle richtig. Wenn man diesem Werthe von $\overset{2}{\mathfrak{T}}$ noch den Werth von $\overset{3}{3} = +\ 0{,}000000014$ hinzufügt, so erhält man:

$\overset{2}{\mathfrak{T}} + \overset{3}{3} = -\ 0{,}005448519$

Es ist: $u = +\ 2{,}1$

daher: $x = +\ 2{,}094551481$

noch auf neun Decimalstellen richtig.

182. Genügte aber eine Genauheit von selbst 22 Decimalstellen nicht, so ist man abermals genöthigt, zu transformiren. Der erste Näherungswerth für x der transformirten Gleichung (181.) ergibt sich wieder nach (134. 1.), nämlich:

$$\begin{array}{ll|l} & \mathfrak{S} = -0{,}005 \text{ beinahe} & \text{und } 0 = \begin{array}{l}-5\\-4{,}190\\+9{,}195007375\end{array}\left|\begin{array}{l}\\-2\\+13{,}167075\end{array}\right| \cdot x \quad + 6{,}285 \cdot x^2 + x^3 \\ & \overset{\prime}{u} = +2{,}1 & \\ \text{daher} & \overset{\prime\prime}{u} = +2{,}095 & 0 = +0{,}005007375 \quad + 11{,}167075 \cdot x + 6{,}285 \cdot x^2 + x^3 \\ & \overset{\prime\prime}{u}{}^2 = +4{,}389025 & \qquad\quad A \qquad\qquad\qquad\quad B \qquad\qquad\quad C \qquad\quad D \\ & \overset{\prime\prime}{u}{}^3 = +9{,}195007375 & \end{array}$$

und nun nach (176. 1.) $\frac{1}{z} = 3962{,}446\ldots$; daher nach (177.) $881{,}882\ldots < p < 882{,}882\ldots$ oder nach (176. 4.) $882 < p < 883$; so daß also die Vertikalreihe $\overset{882}{m}$ [1] eine in ihren Anfangsgliedern noch abnehmende, dagegen die Vertikalreihe $\overset{883}{m}$ [1] eine in ihren Anfangsgliedern zunehmende, convergirende Reihe liefert.

Will man wieder untersuchen, bis zu wieviel Decimalstellen genau die Wurzel durch die fünf ersten Summenglieder bestimmt wird, so ergibt sich aus:

$$\begin{array}{rl} \log. 55 &= 1{,}7403627 \\ \log. A^9 &= 0{,}2964909 - 21 \\ \log. D^4 &= 0 \\ \text{d. E. } \log. B^{13} &= 0{,}3767878 - 14 \\ \hline \log. \overset{6}{9} &= 0{,}4136414 - 33 \end{array}$$

daß der Werth von $\overset{6}{9}$ erst mit der 33. Decimalstelle beginnt, mithin die gegebene Gleichung mit Hülfe der 5 gefundenen Summenglieder auf 32 Decimalstellen, bis zu welcher Genauheit die Wurzel dieser Gleichung bereits von Fourier bestimmt wurde, berechnet werden kann.

183.

Lösung der Gleichung

$$0 = +10 + 53\,y + 23\,y^2 + 9\,y^3 + y^4 \qquad (71.)$$
$$\;\;\; A \quad\;\; B \qquad\; C \qquad\; D \quad\; E$$

welcher Gleichung die Bedingungen (175.) bereits entsprechen, weßhalb sich auch ohne Transformirung convergente Reihen ergeben. [Vergleiche hiermit (41.)] Nach (176. 1.) ist für unser Beispiel $\frac{1}{z} = \frac{53^2}{10 \cdot 23} = 12{,}21\ldots$, daher nach (176. 4.)

$$4 < p < 5;$$

so daß die Reihe $\overset{4}{m}$ [1] eine in ihren Anfangsgliedern noch abnehmende, dagegen die Reihe $\overset{5}{m}$ [1] eine in ihren Anfangsgliedern zunehmende convergente Reihe liefert. Da hier die Zahl p die Grenze von (146. 2.) nicht überschreitet, so geht aus den Nennern der Coefficienten-Quotienten, nämlich: $9\tfrac{1}{3} < 12{,}21\ldots < 13\tfrac{3}{4}$ dasselbe hervor.

Durch Mitanwendung der Formel (139. 11.) zur Bestimmung von y wird daher die (176.) gesteckte Grenze für die Anwendung des Umkehrungsverfahrens überschritten.

Außerdem ergibt sich aus (146. 2.), daß die Reihe $\overset{5}{m}$ [E] noch in ihren Anfangsgliedern abnehmend, dagegen die Reihe $\overset{6}{m}$ [E] in ihren Anfangsgliedern zunehmend ist, weil $10\tfrac{2}{7} < 12{,}21\ldots < 14\tfrac{2}{3}$ ist. Vergleichen wir $\frac{1}{z}$ mit den Nennern der anfänglichen Coefficienten-Quotienten der Reihen $\overset{6}{m}$ [1] und $\overset{6}{m}$ [E], so ergibt sich, daß, weil $18\tfrac{1}{5} > 12{,}21\ldots > 10\tfrac{10}{11}$ und $14\tfrac{2}{3} > 12{,}21\ldots > 9\tfrac{1}{10}$ ist, die Glieder $\overset{6}{10}$ und $\overset{6}{9}_{II}$ die größten Glieder der Reihen $\overset{6}{m}$ [1] und $\overset{6}{m}$ [E] und mithin diejenigen Glieder sind, welche zur Bestimmung, bis zu welcher Grenze die Wurzel durch die Summenformeln gefunden wird, am meisten einwirken. Nun ergibt sich $\log. \overset{6}{10} = 0{,}3149934 - 8$ und $\log. \overset{6}{9}_{II} = 0{,}6741700 - 8$, so daß also die bedeutlichen Ziffer beider Glieder mit der 8. Decimalstelle beginnen. Da aber die Grenze der Anwendung des Umkehrungsverfahrens durch die Mitanwendung der Formel (139. 11.) überschritten wird, so können wir nicht mehr hieraus erkennen, ob die bedeutlichen Ziffer der Reihen $\overset{6}{m}$ [1] und $\overset{6}{m}$ [E] mit der achten Decimalstelle beginnen.

184. Die Anwendung der Formeln ergibt:

$$z = \tfrac{230}{2809} = +\,0{,}08187967 \qquad (134.\ 3.)$$

$$S = -\,0{,}1637593 \qquad (134.\ 5.)$$

$$1 + 2S = +\,0{,}6724814$$

$$(1+2S)^{1/2} = +\,0{,}8200496$$

$$\overset{II}{T} = -\,0{,}1799503 \qquad (135.\ 10.)$$

$$\frac{B}{2C} = +\,\tfrac{53}{46}$$

$$\overset{2}{\mathfrak{T}} = -\,0{,}2073341 \qquad (135.\ 13.)$$

$$\frac{S}{1+\overset{II}{T}} = -\,\frac{0{,}1637593}{0{,}8200496} = -\,0{,}1996944$$

$$\frac{2+\overset{II}{T}}{2} = +\,0{,}9100248$$

$$-\frac{S}{1+\overset{II}{T}}\cdot\frac{2+\overset{II}{T}}{2} = +\,0{,}1817268$$

$$\overset{II}{T} = -\,0{,}1799503$$

$$\overset{III}{S} = +\,0{,}0017765 \qquad (136.\ 9.)$$

$$\frac{B^2D}{2C^3} = +\,1{,}038916$$

$$\overset{3}{\mathfrak{S}} = +\,0{,}0018456 \qquad (136.\ 10.)$$

$$\overset{2}{\mathfrak{T}} = -\,0{,}2073341$$

$$\overset{3}{\mathfrak{T}} = -\,0{,}2054885 \qquad (133.\ 1.)$$

$$-\frac{S^2}{4(1+2S)} = -\,0{,}0099694$$

$$\frac{\overset{II}{S}}{2} = -\,0{,}0080955$$

$$\text{addirt:} = -\,0{,}0180649$$

$$-\frac{S}{1+\overset{II}{T}}\left[\frac{\overset{II}{S}}{2} - \frac{S^2}{4(1+2S)}\right] = -\,0{,}0036074$$

$$2\overset{III}{S} = +\,0{,}0035530$$

$$\overset{IV}{S} = -\,0{,}0000544 \qquad (137.\ 10.)$$

$$\frac{B^3D^2}{2C^5} = +\,0{,}9367932$$

$$\overset{4}{\mathfrak{S}} = -\,0{,}0000509 \qquad (137.\ 11.)$$

$$\overset{3}{\mathfrak{T}} = -\,0{,}2054885$$

$$\overset{4}{\mathfrak{T}} = -\,0{,}2055394 \qquad (133.\ 1.)$$

$$S^3 = -\,0{,}0043915$$

$$3S^3 = -\,0{,}0131745$$

$$8\,(1+2S)^2 = +\,3{,}617848$$

$$+\frac{3S^3}{8(1+2S)^2} = -\,0{,}0036415$$

$$+\frac{S^2}{4(1+2S)} = +\,0{,}0099694$$

$$+\overset{II}{T}S = +\,0{,}0294685$$

$$\text{addirt:} = +\,0{,}0357964$$

$$\frac{S}{1+\overset{II}{T}}\left[\overset{II}{T}S + \frac{S^2}{4(1+2S)} + \frac{3S^3}{8(1+2S)^2}\right] = -\,0{,}0071483$$

$$5\overset{IV}{S} = -\,0{,}0002721$$

$$\text{addirt:} = -\,0{,}0074204$$

$$+\,5\,(1+S)\,\overset{III}{S} = +\,0{,}0074280$$

$$\overset{V}{S} = +\,0{,}0000076 \qquad (139.\ 10.)$$

$$\frac{B^4D^3}{6C^7} = +\,0{,}2815691$$

$$\overset{5}{\mathfrak{S}} = +\,0{,}0000021 \qquad (139.\ 11.)$$

$$\overset{4}{\mathfrak{T}} = -\,0{,}2055394$$

$$\overset{5}{\mathfrak{T}} = -\,0{,}2055373 \qquad (133.\ 1.)$$

$$-\frac{S}{1+\overset{II}{T}}\cdot\frac{\overset{II}{S}}{2} = -\,0{,}0016166$$

$$\overset{III}{S} = +\,0{,}0017765$$

$$\overset{IV}{S}_{II} = +\,0{,}0001599 \qquad (138.\ 9.)$$

$$-\frac{B^3E}{2C^4} = -\,0{,}2660030$$

$$\overset{4}{\mathfrak{S}}_{II} = -\,0{,}0000425 \qquad (138.\ 10.)$$

$$\frac{3\overset{II}{S}}{2} = -\,0{,}0242865$$

$$\frac{S}{1+\overset{II}{T}}\cdot\frac{3\overset{II}{S}}{2} = +\,0{,}0048498$$

$$-\overset{IV}{S} = +\,0{,}0000544$$

$$\text{addirt:} = +\,0{,}0049042$$

$$-\,\tfrac{3}{2}\,(2+S)\,\overset{III}{S} = -\,0{,}0048931$$

$$\overset{V}{S}_{II} = +\,0{,}0000111 \qquad (140.\ 9.)$$

$$\frac{B^4DE}{2C^6} = +\,0{,}2398547$$

$$\left.\begin{aligned}\overset{5}{\mathfrak{S}}_{II} &= +\,0{,}0000026\\ \overset{4}{\mathfrak{S}}_{II} &= -\,0{,}0000425\end{aligned}\right\}\quad(140.\ 10.)$$

$$\left.\begin{aligned}\overset{5}{\mathfrak{T}}_{II} &= -\,0{,}0000399\\ \overset{5}{\mathfrak{T}} &= -\,0{,}2055373\end{aligned}\right\}\quad(133.\ 2.)$$

$$y = \overset{5}{\mathfrak{T}} + \overset{5}{\mathfrak{T}}_{II} = -\,0{,}2055772$$

welcher Werth bis zur siebenten Decimalstelle mit dem in (71.) gefundenen übereinstimmt.

185. Wäre aber für unser Beispiel die Richtigkeit von sieben Decimalstellen durchaus erforderlich, so ist man genöthigt, die gegebene Gleichung zu transformiren. Man erhält aus (134. 1.) als ersten Näherungswerth:

$\mathfrak{S} = -\frac{10}{53} = -\,0{,}2$ beinahe, also

$$\begin{aligned} u &= -\,0{,}2\\ u^2 &= +\,0{,}04\\ u^3 &= -\,0{,}008\\ u^4 &= +\,0{,}0016\end{aligned}$$

daher
$$\begin{array}{rrrrr} 0 = +\,10 & & & & \\ -\,10{,}6 & +\,53 & & & \\ +\,0{,}92 & -\,9{,}2 & +\,23 & & \\ -\,0{,}072 & +\,1{,}08 & -\,5{,}4 & +\,9 & \\ +\,0{,}0016 & -\,0{,}032 & +\,0{,}24 & -\,0{,}8 & +\,x^4 \\ & .\,x & .\,x^2 & .\,x^3 & \\ \hline 0 = +\,0{,}2496 & +\,44{,}848\,.\,x & +\,17{,}84\,.\,x^2 & +\,8{,}2\,.\,x^3 & +\,x^4 \\ A & B & C & D & E \end{array}$$

Hieraus ergibt sich $\frac{1}{z} = 451{,}69\ldots$ und $101 < p < 102$ ꝛc.

und ferner log. $\overset{3}{3} = 0{,}4985753 - 8$, daher die Formel $\overset{2}{\mathfrak{T}}$ den Werth der Unbekannten auf 7 Stellen genau liefert.

Die Rechnung ergibt:

$$z = \frac{0{,}2496\,.\,17{,}84}{44{,}848^2} = +\,0{,}00221387 \qquad (135.\ 3.)$$

$$1 - 4z = +\,0{,}9911445$$

$$(1 - 4z)^{1/2} = +\,0{,}9955624$$

$$\overset{II}{T} = (1 - 4z)^{1/2} - 1 = -\,0{,}0044376 \qquad (135.\ 10.)$$

$$\frac{B}{2C} = +\,1{,}2569506$$

$$\left.\begin{aligned}\overset{2}{\mathfrak{T}} &= -\,0{,}0055778\\ u &= -\,0{,}2\end{aligned}\right\}\quad(135.\ 12.)$$

$$y = -\,0{,}2055778$$

186. Setzt man die Untersuchung, bis zu wieviel Decimalstellen genau mit Hinzufügung der folgenden Summenformeln die Unbekannte bestimmt wird, fort, so ergibt sich durch Bestimmung der Logarithmen der ersten Glieder der Vertikalreihen (146. 2.), nämlich:

log. $\overset{4}{4}_{II} = 0{,}3302629 - 11$

log. $\overset{4}{5} = 0{,}7287704 - 13$

log. $\overset{5}{6}_{II} = 0{,}9284347 - 16$

log. $\overset{5}{7} = 0{,}0839041 - 17$

log. $\overset{6}{8}_{II} = 0{,}4896230 - 20$

log. $\overset{6}{9} = 0{,}4981593 - 22$

daß die Unbekannte mittelst der Formeln

$\overset{3}{\mathfrak{T}}$ auf 10 Decimalstellen,

$\overset{3}{\mathfrak{T}} + \overset{4}{\mathfrak{S}}_{II}$ „ 12 „

$\overset{4}{\mathfrak{T}} + \overset{4}{\mathfrak{S}}_{II}$ „ 15 „

$\overset{4}{\mathfrak{T}} + \overset{5}{\mathfrak{T}}_{II}$ „ 16 „

$\overset{5}{\mathfrak{T}} + \overset{5}{\mathfrak{T}}_{II}$ „ 19 „

bestimmt werden.

Genügte nun z. B. eine Genauheit von 12 Decimalstellen, so könnte man zur Bestimmung der Unbekannten schon mit der Formel $\overset{2}{\mathfrak{T}}$ auslangen, wenn man alle Anfangsglieder der Reihen $\overset{3}{m}\,[1]$ und $\overset{4}{m}\,[E]$, deren bedeutliche Ziffer mit den ersten 12 Decimalstellen beginnen, dem gefundenen Werthe von $\overset{2}{\mathfrak{T}}$ beifügt. Die Rechnung ergibt:

$$z = +\ 0{,}002213875887$$
$$1 - 4z = +\ 0{,}991144496448$$
$$(1 - 4z)^{1/2} = +\ 0{,}995562402086$$
$$\overset{II}{T} = -\ 0{,}004437597913$$
$$\frac{B}{2C} = +\ 1{,}256950672645$$

$$\left.\begin{array}{r} \overset{2}{\mathfrak{C}} = -\ 0{,}005577841681 \\ \text{Rest} = +\ 0{,}000000031849 \\ u = -\ 0{,}2 \end{array}\right\}$$ (Siehe folgende Spalte.)

$$y = -\ 0{,}205577809832$$

$$\overset{3}{3} = +\ 0{,}0000000315192$$
$$\overset{3}{4} = +\ 0{,}0000000003488$$
$$\overset{3}{5} = +\ 0{,}0000000000032$$
$$+\ 0{,}0000000318712$$
$$\overset{4}{4}_{II} = -\ 0{,}0000000000213$$
$$\overset{4}{5}_{II} = -\ 0{,}0000000000002$$
$$-\ 0{,}0000000000215$$
$$+\ 0{,}0000000318712$$
$$\text{Rest} = +\ 0{,}000000031849$$

Anwendung der Umkehrungsformel auf die Lösung transcendenter Gleichungen.

187. Das Umkehrungsverfahren leistet besonders gute Dienste bei der Lösung transcendenter Gleichungen, wenn man bereits einen Näherungswerth kennt und es sich darum handelt, die Unbekannte noch bis zu einem beliebigen oder verlangten Grade der Genauheit zu bestimmen.

Man hat hierbei nur nöthig, die vorgelegte Gleichung in Reihen, geordnet nach Potenzen der Unbekannten, zu entwickeln, dergestalt, daß das erste Glied dieser Reihe, wenn man einen mehr genäherten Werth für die Unbekannte substituirt, sich auch mehr dem Werthe von Null nähert. Es wird hierbei jedesmal das erste Glied die auf Null gebrachte gegebene Gleichung enthalten, wenn man in derselben u für y schreibt.

An einigen Beispielen soll das Nöthige gezeigt werden.

Anmerkung. In den nachfolgenden Darstellungen bedeutet:
Ln. Natürlicher Logarithmus,
log. Gewöhnlicher Logarithmus,
m. Modul des gewöhnlichen Logarithmen-Systems.

188. **Lösung der Gleichung**

1) $$a = y\ .\ \text{Ln.}\ y$$

Ist u nahe ein Werth von y und schreibt man u + ux für y, so geht die Gleichung über in

2) $$a = (u + ux)\ (\text{Ln.}\ u + x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots)$$ oder:

3) $$0 = \underbrace{-\ a + u\ \text{Ln.}\ u}_{A} + \underbrace{(u + u\,\text{Ln.}\ u)}_{B}\ x + \underset{C}{\tfrac{1}{2}\ u\ .\ x^2} - \underset{D}{\tfrac{1}{6}\ u\ .\ x^3} + \underset{E}{\tfrac{1}{12}\ u + x^4} - \underset{F}{\tfrac{1}{20}\ u\ .\ x^5} + \ldots$$

Es sei z. B. a = 100, so ergibt sich aus den Tafeln der natürlichen Logarithmen leicht, daß u = 30 nahe ein Werth für y ist. Aus u . Ln. u, nämlich 30 . 3,4 . . = 102, . . und a = 100 findet sich dann A = 2, . . und B = 132, . . ; daher $x = -\frac{A}{B} + \ldots = -\frac{1}{66} + \ldots$; also ux = — 0,5 beinahe. Mithin ergibt sich für $u' = u + ux$, nämlich $u' = 29{,}5$ ein näherer Werth für y, als für u = 30*).

---

*) Wir wollen in den folgenden Beispielen von der Bestimmung der Werthe u', u'', . . . absehen und stets den zuletzt erhaltenen Werth für u alsbald substituiren.

Schreibt man demnach 29,5 für u in die Gleichung 3), so berechnen sich die Umkehrungs-Coefficienten, wie folgt:

$A = -\quad 0{,}160487231299\ \ldots$

$B = +\ 129{,}3395127687\ \ldots$

$C = +\quad 14{,}75$

$D = +\quad 4{,}91666\ \ldots$

$E = +\quad 2{,}95833\ \ldots$

u. s. w.

Löst man nun nach (33.) oder nach (146. 2.) gliedweise auf, so ergibt die Rechnung:

$$\begin{aligned}
II = \overset{2}{2} &= -\ 0{,}0000001755817\\
\overset{2}{III} = \overset{3}{3} &= -\ 0{,}0000000000726\\
&\ -\ 0{,}0000001756543\\[4pt]
I &= +\ 0{,}0012408213690\\
\overset{1}{III} = \overset{2}{3} &= +\ 0{,}0000000000497\\
&\ +\ 0{,}0012408214187\\
&\ -\ 0{,}0000001756543\\[4pt]
x &= +\ 0{,}0012406457644\\
u\,x &= +\ 0{,}036599050050\\
u &= +\ 29{,}5\\
y &= +\ 29{,}536599050050
\end{aligned}$$

189. **Lösung der Gleichung**

1) $a^y = y^a$ oder 2) $y \,.\, \log.\, a = a \,.\, \log.\, y$

Ist u nahe ein Werth von y und schreibt man u + x für y, so geht die Gleichung über in:

3) $a^{u+x} = (u+x)^a$ oder 4) $(u+x) \log.\, a = a \,.\, \log.\, (u+x)$

5) $$(u+x)\log.\, a = a\left[\log.\, u + \frac{2m}{1}\left(\frac{x}{2u+x}\right) + \frac{2m}{3}\left(\frac{x}{2u+x}\right)^3 + \frac{2m}{5}\left(\frac{x}{2u+x}\right)^5 + \ldots\right]$$

Schreibt man in dieser Darstellung v für $\frac{x}{2u+x}$, also $\frac{2uv}{1-v}$ für x, so geht dieselbe, wenn man $u + x = u \,.\, \frac{1+v}{1-v}$ in eine Reihe entwickelt, über in:

6) $$\frac{u \,.\, \log.\, a}{a} = (1 - 2v + 2v^2 - 2v^3 + 2v^4 - \ldots)\left(\log.\, u + \frac{2m}{1} \,.\, v + \frac{2m}{3} \,.\, v^3 + \frac{2m}{5} \,.\, v^5 + \ldots\right)$$

Hieraus ergibt sich zur Bestimmung der Umkehrungs-Coefficienten die Gleichung:

7) $$0 = \underbrace{-\frac{u \,.\, \log.\, a}{a} + \log.\, u}_{A}\ \underbrace{\left.\begin{matrix}-\ 2\log.\, u\\+\ 2m\end{matrix}\right\}}_{B} . v\ \underbrace{\left.\begin{matrix}+\ 2\log.\, u\\-\ 4m\end{matrix}\right\}}_{C} . v^2\ \underbrace{\left.\begin{matrix}-\ 2\log.\, u\\+\ \frac{14}{3}m\end{matrix}\right\}}_{D} . v^3\ \underbrace{\left.\begin{matrix}+\ 2\log.\, u\\-\ \frac{16}{3}m\end{matrix}\right\}}_{E} . v^4\ \begin{matrix}-\ \ldots\\+\ \ldots\end{matrix}$$

190. Aufgabe. Man soll diejenige Zahl suchen, welche ihrem gewöhnlichen Logarithmus gleich ist.

Auflösung. Es ist hier a = 10 und aus der Logarithmentafel findet sich leicht u = 1,37 als ein naher Werth von y.

Aus: $\log.\, u = 0{,}1367205671564$

$\log.\, a = 1$

$m = 0{,}4342944819$

berechnen sich die Umkehrungs-Coefficienten:

$A = -\ 0{,}0002794328435$

$B = +\ 0{,}5951478294$

$C = -\ 1{,}463737$

$D = +\ 1{,}753266$

$E = -\ 2{,}042796$

u. s. w.

und die Rechnung ergibt weiter nach (37.) oder (146. 2.):

$$\begin{aligned}
\overset{2}{III} = \overset{3}{3} &= -\ 0{,}0000000003049\\
\overset{2}{IV} = \overset{3}{4} &= -\ 0{,}0000000000017\\
&\ -\ 0{,}0000000003066
\end{aligned}$$

$$\mathrm{I} = +\ 0{,}0004695183787$$
$$\mathrm{II} = \overset{2}{2} = +\ 0{,}0000005421795$$
$$\overset{1}{\mathrm{III}} = \overset{2}{3} = +\ 0{,}0000000012521$$
$$\overset{1}{\mathrm{IV}} = \overset{2}{4} = +\ 0{,}0000000000021$$
$$\overset{3}{\mathrm{IV}} = \overset{4}{4}_{\mathrm{II}} = +\ 0{,}0000000000001$$
$$+\ 0{,}0004700618125$$
$$-\ 0{,}0000000003066$$
$$v = +\ 0{,}000470061506$$

$$2uv = +\ 0{,}001287968526$$
$$1 - v = +\ 0{,}999529938493$$
$$\frac{2uv}{1-v} = x = +\ 0{,}001288574236$$
$$u = +\ 1{,}37$$
$$y = +\ 1{,}371288574236$$

191. Lösung der Gleichung

1) $$a = b^y + c^y.$$

Ist u nahe ein Werth von y und schreibt man u + x für y, so geht die Gleichung über in:

2) $$a = b^{u+x} + c^{u+x} = b^u \cdot b^x + c^u \cdot c^x.$$ Nun ist:

3) $$b^u \cdot b^x = b^u \cdot \left[1 + \frac{\text{Ln. } b}{1} \cdot x + \frac{(\text{Ln. } b)^2}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{(\text{Ln. } b)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \frac{(\text{Ln. } b)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot x^4 + \ldots\right]$$ und

4) $$c^u \cdot c^x = c^u \cdot \left[1 + \frac{\text{Ln. } c}{1} \cdot x + \frac{(\text{Ln. } c)^2}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{(\text{Ln. } c)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \frac{(\text{Ln. } c)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot x^4 + \ldots\right];$$ daher ist:

5) $$0 = \underbrace{-a + b^u + c^u}_{A} + \underbrace{[b^u \cdot \text{Ln. } b + c^u \cdot \text{Ln. } c]}_{B} \cdot x + \underbrace{\frac{b^u \cdot (\text{Ln. } b)^2 + c^u \cdot (\text{Ln. } c)^2}{1 \cdot 2}}_{C} \cdot x^2$$
$$+ \underbrace{\frac{b^u \cdot (\text{Ln. } b)^3 + c^u \cdot (\text{Ln. } c)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}}_{D} \cdot x^3 + \underbrace{\frac{b^u \cdot (\text{Ln. } b)^4 + c^u \cdot (\text{Ln. } c)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}}_{E} \cdot x^4 + \ldots$$

Es sei z. B. $a = 20$, $b = 4$, und $c = 5$, so ergibt sich leicht für $u = 1{,}53$ ein naher Werth von y. Substituirt man diese Zahlenwerthe in 5), so ergeben sich die Umkehrungs-Coefficienten wie folgt:

$$A = +\ 0{,}073132315$$
$$B = +\ 30{,}445504069$$
$$C = +\ 23{,}21015$$
$$D = +\ 11{,}85569$$
$$E = +\ 4{,}56325$$

u. s. w.

Löst man nach (31.) oder nach (146. 2.) gliedweise auf, so ergibt die Rechnung:

$$+$$
$$\overset{2}{\mathrm{III}} = \overset{3}{3} = 0{,}000000005397$$
$$\overset{2}{\mathrm{IV}} = \overset{3}{4} = 0{,}000000000049$$
$$+\ 0{,}00000000544$$

$$-$$
$$\mathrm{I} = 0{,}00240207273$$
$$\mathrm{II} = \overset{2}{2} = 0{,}00000439872$$
$$\overset{1}{\mathrm{III}} = \overset{2}{3} = 0{,}00000001611$$
$$\overset{1}{\mathrm{IV}} = \overset{2}{4} = 0{,}00000000007$$
$$-\ 0{,}00240648764$$
$$+\ 0{,}00000000544$$
$$x = -\ 0{,}00240648220$$
$$u = +\ 1{,}53$$
$$y = +\ 1{,}5275935177$$

192. Lösung der Gleichung

1) $$a = y^y$$ oder 2) $$\log. a = y \cdot \log. y$$

Ist u nahe ein Werth von y und schreibt man u + x für y, so geht die Gleichung über in:

3) $$a = (u + x)^{u+x}$$ oder 4) $$\log. a = (u + x) \log. (u + x)$$

5) $$\log. a = (u + x)\left[\log. u + \frac{2m}{1}\left(\frac{x}{2u+x}\right) + \frac{2m}{3}\left(\frac{x}{2u+x}\right)^3 + \frac{2m}{5}\left(\frac{x}{2u+x}\right)^5 + \ldots\right]$$

Schreibt man in dieser Darstellung v für $\frac{x}{2u+x}$, also $\frac{2uv}{1-v}$ für x, so geht dieselbe, wenn man $u + x = u \,.\, \frac{1+v}{1-v}$ in eine Reihe entwickelt, über in:

6) $$\frac{\log. a}{u} = (1 + 2v + 2v^2 + 2v^3 + 2v^4 + \ldots)\left(\log. u + \frac{2m}{1} \,.\, v + \frac{2m}{3} \,.\, v^3 + \frac{2m}{5} \,.\, v^5 + \ldots\right)$$ Hieraus ergibt sich:

7) $$0 = \underbrace{-\frac{\log. a}{u} + \log. u}_{A} + \underbrace{\left\{\begin{matrix}2 \log. u \\ + 2m\end{matrix}\right\}}_{B} . v + \underbrace{\left\{\begin{matrix}2 \log. u \\ + 4m\end{matrix}\right\}}_{C} . v^2 + \underbrace{\left\{\begin{matrix}2 \log. u \\ + \frac{14}{3} m\end{matrix}\right\}}_{D} . v^3 + \underbrace{\left\{\begin{matrix}2 \log. u \\ + \frac{16}{3} m\end{matrix}\right\}}_{E} . v^4 + \ldots$$

Es sei z. B. $a = 10$,
so findet sich leicht $u = 2,5$
als ein naher Werth von y
und es ergeben sich aus: $\log. u = 0,3979400087$
$\log. a = 1$
$m = 0,4342944819$
für die Umkehrungs-Coefficienten nachstehende Werthe:

$A = -\ 0,0020599913$
$B = +\ 1,6644689812$
$C = +\ 2,5330579$
$D = +\ 2,8225875$
$E = +\ 3,1121172$
u. s. w.

Löst man nun nach (33.) oder nach (146. 2.) gliedweise auf, so ergibt die Rechnung:

+	−
$I = 0,001237626726$	$II = \overset{2}{2} = 0,000002331033$
$\overset{1}{III} = \overset{2}{3} = 0,0000000087808$	$\overset{2}{III} = \overset{3}{3} = 0,0000000032147$
$\overset{2}{IV} = \overset{3}{4} = 0,0000000000302$	$\overset{1}{IV} = \overset{2}{4} = 0,0000000000413$
$\overset{1}{V} = \overset{2}{5} = 0,0000000000002$	$\overset{3}{IV} = \overset{4}{4}_{II} = 0,0000000000043$
$\overset{3}{V} = \overset{4}{5} = 0,0000000000000$	$\overset{2}{V} = \overset{3}{5} = 0,0000000000002$
$+\ 0,0012376355372$	$-\ 0,0000023342935$

$+\ 0,0012376355372$
$-\ 0,0000023342935$
$v = +\ 0,001235301243$

$2uv = +\ 0,006176506215$
$1 - v = +\ 0,998764698756$

$$\frac{2uv}{1-v} = x = +\ 0,006184145497$$

Es ist: $u = +\ 2,5$

daher: $y = +\ 2,506184145497$

193. Lösung der Gleichung

1) $a = y^{y^2}$ oder 2) $\log. a = y^2 \,.\, \log. y$

Ist u nahe ein Werth von y und schreibt man u + x für y, so geht die Gleichung über in:

3) $a = (u + x)^{(u+x)^2}$ oder 4) $\log. a = (u + x)^2 \log. (u + x)$

5) $$\log. a = (u + x)^2\left[\log. u + \frac{2m}{1}\left(\frac{x}{2u+x}\right) + \frac{2m}{3}\left(\frac{x}{2u+x}\right)^3 + \frac{2m}{5}\left(\frac{x}{2u+x}\right)^5 + \ldots\right]$$

Schreibt man in dieser Darstellung v für $\frac{x}{2u+x}$, also $\frac{2uv}{1-v}$ für x, so geht dieselbe, wenn man $u + x = u \,.\, \frac{1+v}{1-v}$ in eine Reihe entwickelt, über in:

6) $\frac{\log. a}{u^2} = (1 + 4v + 8v^2 + 12v^3 + 16v^4 + \ldots)\left(\log. u + \frac{2m}{1} \cdot v + \frac{2m}{3} \cdot v^3 + \frac{2m}{5} \cdot v^5 + \ldots\right)$ Hieraus ergibt sich:

7) $$0 = \underbrace{-\frac{\log. a}{u^2} + \log. u}_{A} + \underbrace{\left.\begin{matrix} 4 \log. u \\ + 2m \end{matrix}\right\}}_{B} . v + \underbrace{\left.\begin{matrix} 8 \log. u \\ + 8m \end{matrix}\right\}}_{C} . v^2 + \underbrace{\left.\begin{matrix} 12 \log. u \\ + 16m \\ + \frac{2m}{3} \end{matrix}\right\}}_{D} . v^3 + \underbrace{\left.\begin{matrix} 16 \log. u \\ + 24m \\ + \frac{8m}{3} \end{matrix}\right\}}_{E} . v^4 + \ldots$$

Es sei z. B. a = 100, so findet sich leicht:
als ein naher Werth von y und aus:

$$\begin{aligned} u &= 2{,}332 \\ u^2 &= 5{,}438224 \\ \log. u &= 0{,}36772854608697647 \\ \log. a &= 2 \\ m &= 0{,}43429448190325182 \\ \frac{\log. a}{u^2} &= 0{,}36776712397282642 \end{aligned}$$

ergeben sich für die Umkehrungs-Coefficienten nachstehende Werthe:

$$\begin{aligned} A &= -\ 0{,}0000385778858499 \\ B &= +\ 2{,}3395031481544092 \\ C &= +\ 6{,}41618421 \\ D &= +\ 11{,}6509839 \\ E &= +\ 17{,}4648429 \end{aligned}$$

u. s. w.

Löst man nun nach (33.) oder nach (146. 2.) gliedweise auf, so ergibt die Rechnung:

$$\begin{aligned} &+ \\ I &= 0{,}0000164897772761 \\ \overset{1}{III} = \overset{2}{3} &= 0{,}0000000000000674 \\ &+ 0{,}0000164897773435 \\ &- 0{,}0000000007457548 \\ v &= +\ 0{,}0000164890315887 \\ 2uv &= +\ 0{,}0000769048433302 \\ 1 - v &= +\ 0{,}9999835109684112 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \\ II = \overset{2}{2} &= 0{,}0000000007457325 \\ \overset{2}{III} = \overset{3}{3} &= 0{,}0000000000000223 \\ &- 0{,}0000000007457548 \\ \frac{2uv}{1-v} = x &= +\ 0{,}0000769061114375 \\ u &= +\ 2{,}332 \\ y &= +\ 2{,}3320769061114375 \end{aligned}$$

194. Ist allgemein die gegebene Gleichung

1) $a = y^{y^n}$ oder 2) $\log. a = y^n . \log. y$

und u nahe ein Werth von y, so ergibt sich für $y = u + x$ und $x = \frac{2uv}{1-v}$, als Gleichung zur Bestimmung der Umkehrungs-Coefficienten:

3) $$0 = \underbrace{-\frac{\log. a}{u^n} + \log. u}_{A} + \underbrace{\left.\begin{matrix} 2n \log. u \\ + 2m \end{matrix}\right\}}_{B} . v + \underbrace{\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} 2n \\ + 4n_2 \end{matrix}\right\} \log. u \\ + 4nm \end{matrix}\right\}}_{C} . v^2 + \underbrace{\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} + 2n \\ + 8n_2 \\ + 8n_3 \end{matrix}\right\} \log. u \\ \left.\begin{matrix} + 4n \\ + 8n_2 \\ + \frac{2}{3} \end{matrix}\right\} m \end{matrix}\right\}}_{D} . v^3 + \underbrace{\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} + 2n \\ + 12n_2 \\ + 24n_3 \\ + 16n_4 \end{matrix}\right\} \log. u \\ \left.\begin{matrix} + 4n \\ + 16n_2 \\ + 16n_3 \\ + \frac{4}{3}n \end{matrix}\right\} m \end{matrix}\right\}}_{E} . v^4 + \ldots$$

Setzt man aber $y = u + ux$, so ergibt sich als Gleichung zur Bestimmung der Umkehrungs-Coefficienten:

$$4)\quad 0 = \underbrace{-\frac{\log. a}{u^u} + \log. u}_{A} + \underbrace{\left(m + n.\log. u\right)}_{B} . x + \underbrace{\left(-\frac{m}{2} + nm + n_2.\log. u\right)}_{C} . x^2 + \underbrace{\left(+\frac{m}{3} - n.\frac{m}{2} + n_2.m + n_3.\log. u\right)}_{D} . x^3 + \underbrace{\left(-\frac{m}{4} + n.\frac{m}{3} - n_2.\frac{m}{2} + n_3.m + n_4.\log. u\right)}_{E} . x^4 + \underbrace{\left(+\frac{m}{5} - n.\frac{m}{4} + n_2.\frac{m}{3} - n_3.\frac{m}{2} + n_4.m + n_5.\log. u\right)}_{F} . x^5 - \ldots$$

195.

Lösung der Gleichung

$$1)\quad a = y^{y^y} \qquad \text{oder} \qquad 2)\quad \log. a = y^y . \log. y$$

Ist u nahe ein Werth von y und schreibt man $u + ux$ für y, so geht die Gleichung über in:

$$3)\quad a = [u(1+x)]^{[u(1+x)]^{u(1+x)}} \qquad \text{oder} \qquad 4)\quad \log. a = [u(1+x)]^{u(1+x)} . \log. [u(1+x)]$$

5) $\log. a = u^u . u^{ux} . (1+x)^u . (1+x)^{ux} . \log. [u(1+x)]$. 6) Es sei $u^u = U$, also $u^{ux} = U^x$, so ist:

$$7)\quad U^x = 1 + \frac{Ln. U}{1} . x + \frac{(Ln. U)^2}{1.2} . x^2 + \frac{(Ln. U)^3}{1.2.3} . x^3 + \frac{(Ln. U)^4}{1.2.3.4} . x^4 + \ldots.$$

$$8)\quad (1+x)^{ux} = 1 + \frac{Ln. (1+x)}{1} . ux + \frac{[Ln. (1+x)]^2}{1.2} . u^2x^2 + \frac{[Ln. (1+x)]^3}{1.2.3} . u^3x^3 + \frac{[Ln. (1+x)]^4}{1.2.3.4} . u^4x^4 + \ldots.$$

oder, wenn man die Potenzen von $Ln. (1+x)$ wirklich bildet und dann nach Potenzen von x ordnet:

$$9)\quad (1+x)^{ux} = 1 + u . x^2 - \frac{u}{2} . x^3 + \left(\frac{u}{3} + \frac{u^2}{2}\right) . x^4 - \left(\frac{u}{4} + \frac{u^2}{2}\right) . x^5 + \ldots.$$

Aus der Multiplication von 7) und 9) ergibt sich:

$$10)\quad U^x . (1+x)^{ux} = 1 + (Ln. U) . x + \left\{\frac{(Ln. U)^2}{2} + u\right\} . x^2 + \left\{\frac{(Ln. U)^3}{6} + u(Ln. U) - \frac{u}{2}\right\} . x^3 + \left\{\frac{(Ln. U)^4}{24} + u . \frac{(Ln. U)^2}{2} - \frac{u}{2}(Ln. U) + \left(\frac{u}{3} + \frac{u^2}{2}\right)\right\} . x^4 + \left\{\frac{(Ln. U)^5}{120} + u . \frac{(Ln. U)^3}{6} - \frac{u}{2} . \frac{(Ln. U)^2}{2} + \left(\frac{u}{3} + \frac{u^2}{2}\right) Ln. U - \left(\frac{u}{4} + \frac{u^2}{2}\right)\right\} . x^5 + \ldots$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

11) $(1+x)^u = 1 + ux + u_2x^2 + u_3x^3 + \ldots.$, so erhält man:

$$12)\quad U^x . (1+x)^u . (1+x)^{ux} = 1 + \left\{Ln. U + u\right\} . x + \left\{\tfrac{1}{2}(Ln. U)^2 + u + u(Ln. U) + u_2\right\} . x^2 + \left\{\tfrac{1}{6}(Ln. U)^3 + u(Ln. U) - \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}u(Ln. U)^2 + u^2 + u_2(Ln. U) + u_3\right\} . x^3 + \left\{\tfrac{1}{24}(Ln. U)^4 + \tfrac{1}{2}u(Ln. U)^2 - \tfrac{1}{2}u(Ln. U) + \frac{u}{3} + \frac{u^2}{2} + \tfrac{1}{6}u(Ln. U)^3 + u^2(Ln. U) - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{2}u_2(Ln. U)^2 + u . u_2 + u_3(Ln. U) + u_4\right\} . x^4 + \ldots$$

Nun ist:

13) $$\log. [u(1+x)] = \log. u + mx - \frac{m}{2} . x^2 + \frac{m}{3} . x^3 - \frac{m}{4} . x^4 + \ldots.$$

Multiplicirt man daher diese Gleichung mit 12) und außerdem mit U und bringt alsdann die so producirte Gleichung auf 0, so ergibt sich zur Bestimmung der Umkehrungs-Coefficienten nachstehende Darstellung:

14) $$0 = \underbrace{-\frac{\log. a}{U} + \log. u + (\mathrm{Ln.}\,U)\left\{\begin{matrix}\log. u\\ + u\end{matrix}\right.}_{A} + \underbrace{\left\{\begin{matrix}\log. u\\ \\ + m\end{matrix}\right\}}_{B} . x + \underbrace{\left\{\begin{matrix}\left.\begin{matrix} + \frac{1}{2} (\mathrm{Ln.}\,U)^2 \\ + u \\ + u\,(\mathrm{Ln.}\,U) \\ + u_2\end{matrix}\right\} \log. u \\ \left.\begin{matrix}+ (\mathrm{Ln.}\,U)\\ + u\end{matrix}\right\} m \\ - \frac{1}{2} m\end{matrix}\right\}}_{C} . x^2 + \underbrace{\left\{\begin{matrix}\left.\begin{matrix} + \frac{1}{6} (\mathrm{Ln.}\,U)^3 \\ + u\,(\mathrm{Ln.}\,U) \\ - \frac{1}{2}u \\ + \frac{1}{2}u\,(\mathrm{Ln.}\,U)^2 \\ + u^2 \\ + u_2\,(\mathrm{Ln.}\,U) \\ + u_3\end{matrix}\right\} \log. u \\ \left.\begin{matrix}+ \frac{1}{2}(\mathrm{Ln.}\,U)^2\\ + u \\ + u\,(\mathrm{Ln.}\,U) \\ + u_2\end{matrix}\right\} m \\ \left.\begin{matrix}- (\mathrm{Ln.}\,U)\\ - u\end{matrix}\right\} \frac{1}{2}m \\ + \frac{m}{3}\end{matrix}\right\}}_{D} . x^3 + \ldots.$$

Es sei z. B. $a = 100$, so findet sich leicht
$u = 2{,}213$ als ein Näherungswerth
und es berechnen sich aus:

$\log. u = 0{,}3449814138$

$U = 5{,}800212019$

$\mathrm{Ln.}\,U = 1{,}7578945$

die Umkehrungs-Coefficienten:

$A = +\,0{,}00016643244$

$B = +\,1{,}80417927$

$C = +\,4{,}60894634$

$D = +\,6{,}4375927$

u. s. w.

Nach (31.) oder nach (146. 2.) erhält man:

$$\overset{-}{\mathrm{I}} = 0{,}00009224832$$

$$\mathrm{II} = \overset{2}{2} = 0{,}000000021738$$

$$\overset{1}{\mathrm{III}} = \overset{3}{3} = 0{,}000000000010$$

$$- 0{,}00009227006 8$$

$$+ 0{,}000000000002$$

$$x = - 0{,}00009227006$$

$$\overset{+}{\overset{2}{\mathrm{III}}} = \overset{3}{3} = 0{,}000000000002$$

$$\overset{2}{\mathrm{IV}} = \overset{3}{4} = 0{,}000000000000$$

$$+ 0{,}000000000002$$

daher $ux = - 0{,}00020419364$

$u = +\,2{,}213$

$y = +\,2{,}21279580636$

196. **Lösung der Gleichung**

1) $$a = y + b . \sin. y.$$

Ist u nahe ein Werth von y und schreibt man $u + x$ für y, so geht die Gleichung über in:

2) $$a = u + x + b . \sin. (u + x)$$

3) $a = u + x + b \left[\sin. u + \cos. u \,.\, x - \frac{\sin. u}{1.2} \,.\, x^2 - \frac{\cos. u}{1.2.3} \,.\, x^3 + \frac{\sin. u}{1.2.3.4} \,.\, x^4 + \frac{\cos. u}{1.2.3.4.5} \,.\, x^5 - \ldots \right]$

nämlich:

4) $0 = \underbrace{- a + u + b \,.\, \sin. u}_{A} + \underbrace{(1 + b \,.\, \cos. u)}_{B} \,.\, x - \underbrace{\frac{b \,.\, \sin. u}{1 \,.\, 2}}_{C} \,.\, x^2 - \underbrace{\frac{b \,.\, \cos. u}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}}_{D} \,.\, x^3 + \underbrace{\frac{b \,.\, \sin. u}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}}_{E} \,.\, x^4 + \ldots$

197. Aufgabe. Von einer Kreis-Ebene, deren Halbmesser r ist, soll durch eine Sehne der nte Theil abgeschnitten werden.

Auflösung. Bezeichnet y den der Sehne zugehörigen Centri-Winkel [$< 180^0$] in Graden, so ist der Kreis-Ausschnitt $= \frac{y}{360^0} \,.\, r^2 \pi$, das zugehörige Dreieck $= \frac{1}{2} r^2 \,.\, \sin. y$ und also die Gleichung: $\frac{r^2 \pi}{n} = \frac{y}{360^0} \,.\, r^2 \pi - \frac{1}{2} r^2 \,.\, \sin. y$ oder

$$\frac{360^0}{n} = y - \frac{180^0}{\pi} \,.\, \sin. y.$$

Es sei z. B. n = 3, so ist:

$a = 120^0$, $b = - \frac{180^0}{\pi}$ und es findet sich leicht, daß $u = 150^0$ nahe ein Werth von y ist.

Verwandelt man das Winkelmaß in Bogenmaß, so ergibt sich:

$a = 2{,}09439510239$
$b = - 1$
$u = 2{,}61799387799$
$\sin. u = 0{,}5$
$\cos. u = - 0{,}86602540378$

und hieraus bestimmen sich die Umkehrungs-Coefficienten:

$A = + 0{,}02359877557$
$B = + 1{,}86602540378$
$C = + 0{,}25$
$D = - 0{,}1443375$
$E = - 0{,}0208333$
$F = + 0{,}0072168$
u. s. w.

Löst man nach (31.) oder nach (146. 2.) gliedweise auf, so ergibt die Rechnung:

$\text{I} = - 0{,}01264654572$
$\text{II} = \overset{2}{2} = - 0{,}00002142725$
$\overset{1}{\text{III}} = \overset{2}{3} = - 0{,}00000007261$
$\overset{1}{\text{IV}} = \overset{2}{4} = - 0{,}00000000030$
$\overset{2}{\text{III}} = \overset{3}{3} = - 0{,}00000015645$
$\overset{2}{\text{IV}} = \overset{3}{4} = - 0{,}00000000122$
$\overset{3}{\text{IV}} = \overset{4}{4}_{II} = + 0{,}0000000002$

$x = - 0{,}0126682033$
$u = + 2{,}6179938779$

$y = + 2{,}605325674$

Verwandelt man dieses gefundene Bogenmaß wieder in Winkelmaß, so findet sich:

$$y = 149^0 \; 16' \; 26'',995.$$

198. Kepler'sche Aufgabe. Es bezeichne y die wahre Anomalie eines Planeten für eine bestimmte Zeit t, T die Zeit seines Standes in dem Perihel, m seine mittlere tägliche Bewegung, w den Kreisbogen, der dem Halbmesser gleich ist, und e die Excentricität des Planeten, so ist die bekannte Kepler'sche Formel:

$$m\,(t - T) = y - we \,.\, \sin. y.$$

Beispiel. Mars stand 1840 am 8. Januar $9^h \; 44' \; 0''$ (Berliner Zeit) in seinem Perihel, seine Umlaufszeit beträgt 686,97964 Tage und seine Excentricität ist gleich 0,0932168; in welchem Grade der wahren Anomalie wird er am 24. April um $13^h \; 25' \; 15''$ desselben Jahres gestanden haben?

Die Rechnung ergibt, indem wir zehnzifferige Logarithmen zu Grunde legen:

$$t = \text{April}\ 24^d\ 13^h\ 25'\ 15''$$
$$T = \text{Januar}\ 8\ \ 9\ \ 44\ \ 0$$
$$t - T = 107\ \ 3\ \ 41\ \ 15$$
$$= 107{,}1536458 \text{ Tage}$$

$$\log. 360 = 2{,}5563025008$$
$$\log. 686{,}97964 = 2{,}8369438661$$
$$0{,}7193586347 - 1$$
$$\log. 60 = 1{,}7781512504$$
$$\log. m \text{ (in Minuten)} = 1{,}4975098851$$
$$\log. (t - T) = 2{,}0300069515$$
$$\log. [m(t - T)] = 3{,}5275168366$$
$$m(t - T) = 3369', 122768$$
$$= 56^0\ 9'\ 7'',36608 = a$$

$$w = 57^0\ 17'\ 44'',8062$$
$$= 206264'',8062$$

$$\log. w = 5{,}3144251329$$
$$\log. e = 0{,}9694941901 - 2$$
$$\log. (we) = 4{,}2839193230 \text{ (in Sekunden)}$$
$$we = 19227'',34519$$
$$= 5^0\ 20'\ 27'',34519$$
$$b = -\ 5^0\ 20'\ 27'',34519$$

Es ergibt sich nun leicht, daß für diese gefundenen Werthe von a und b, $u = 60^0$ nahe ein Werth von y ist.

Verwandelt man das Winkelmaß in Bogenmaß, so findet sich:

$$a = 0{,}98003808674$$
$$b = -\ 0{,}09321679997$$
$$u = 1{,}04719755120$$
$$\sin. u = 0{,}86602540378$$
$$\cos. u = 0{,}5$$
$$b \,.\, \sin. u = -\ 0{,}08072811683$$
$$b \,.\, \cos. u = -\ 0{,}04660839998$$

und die Umkehrungs-Coefficienten berechnen sich:

$$A = -\ 0{,}01356865237$$
$$B = +\ 0{,}95339160001$$
$$C = +\ 0{,}04036405841$$
$$D = +\ 0{,}00776806666$$
$$E = -\ 0{,}00336367153$$

u. s. w.

Löst man nun nach (33.) oder nach (146. 2.) gliedweise auf, so ergibt die Rechnung:

$$I = +\ 0{,}01423198232$$
$$\overset{1}{III} = \overset{2}{3} = +\ 0{,}00000001033$$
$$\overset{2}{IV} = \overset{3}{4} = +\ 0{,}00000000007$$
$$\overset{3}{IV} = \overset{4}{4}_{II} = +\ 0{,}00000000013$$
$$+\ 0{,}01423199285$$

$$II = \overset{2}{2} = -\ 0{,}00000857539$$
$$\overset{2}{III} = \overset{3}{3} = -\ 0{,}00000002348$$
$$\overset{1}{IV} = \overset{2}{4} = -\ 0{,}00000000001$$
$$-\ 0{,}00000859888$$
$$+\ 0{,}01423199285$$
$$x = +\ 0{,}0142233939$$
$$u = +\ 1{,}0471975512$$
$$y = +\ 1{,}0614209451$$
$$= 60^0\ 48'\ 53'',7856$$

Der Wichtigkeit dieser Aufgabe wegen wollen wir das Resultat einer Probe unterwerfen. Setzen wir zu dem Ende

$$u = 61^0,$$

so ergeben sich aus:

$$u = 1{,}06465084372$$
$$\sin. u = 0{,}8746197069$$
$$\cos. u = 0{,}4848096202$$
$$b \,.\, \sin. u = -\ 0{,}08152925026$$
$$b \,.\, \cos. u = -\ 0{,}04519240139$$

die Umkehrungs-Coefficienten:

$$A = +\ 0{,}00308350672$$
$$B = +\ 0{,}95480759860$$
$$C = +\ 0{,}04076462513$$
$$D = +\ 0{,}00753206690$$
$$E = -\ 0{,}00339705209$$

u. s. w.

und die Rechnung ergibt nach (31.) oder nach (146. 2.) weiter:

$$\mathrm{I} = -\,0{,}00322945352$$

$$\mathrm{II} = \overset{2}{2} = -\,0{,}00000044527$$

$$\overset{1}{\mathrm{III}} = \overset{2}{3} = -\,0{,}00000000012$$

$$-\,0{,}00322989891$$

$$\overset{2}{\mathrm{III}} = \overset{3}{3} = +\,0{,}00000000026$$

$$x = -\,0{,}0032298986$$

$$u = +\,1{,}0646508437$$

$$y = +\,1{,}0614209451$$

bis zur letzten Decimalstelle mit dem bereits gefundenen Werth von y übereinstimmend.

199. **Lösung der Gleichung**

$$1)\quad a = (\pi - y)\,.\,\cos.\,y + \sin.\,y.$$

Schreibt man u + x für y, so ist:

$$2)\quad \pi\,.\,\cos.\,(u+x) = \pi\,.\,\cos.\,u - \pi\,.\,\sin.\,u\,.\,x - \frac{\pi\,.\,\cos.\,u}{1\,.\,2}\,.\,x^2 + \frac{\pi\,.\,\sin.\,u}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,x^3 + \frac{\pi\,.\,\cos.\,u}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,.\,x^4 - \ldots.$$

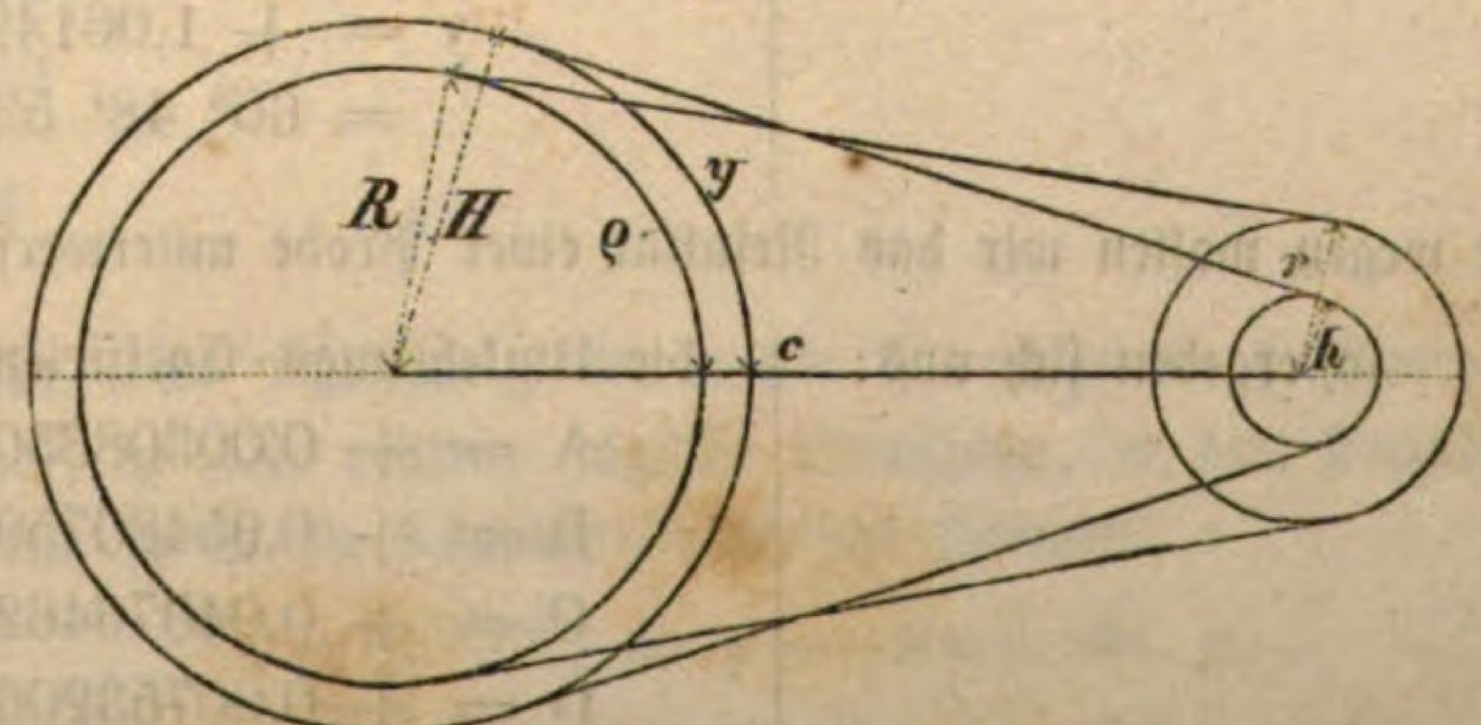
$$3)\quad -(u+x)\cos.\,(u+x) = -u\,.\,\cos.\,u + (u\,.\,\sin.\,u - \cos.\,u)\,.\,x + \frac{u\,.\,\cos.\,u + 2\sin.\,u}{1.2}\,.\,x^2 - \frac{u\,.\,\sin.\,u - 3\cos.\,u}{1.2.3}\,.\,x^3$$
$$- \frac{u\,.\,\cos.\,u + 4\sin.\,u}{1.2.3.4}\,.\,x^4 + \frac{u\,.\,\sin.\,u - 5\cos.\,u}{1.2.3.4.5}\,.\,x^5 + \ldots$$

$$4)\quad \sin.\,(u+x) = \sin.\,u + \cos.\,u\,.\,x - \frac{\sin.\,u}{1.2}\,.\,x^2 - \frac{\cos.\,u}{1.2.3}\,.\,x^3 + \frac{\sin.\,u}{1.2.3.4}\,.\,x^4 + \frac{\cos.\,u}{1.2.3.4.5}\,.\,x^5 - \ldots.$$

Wenn man diese drei Gleichungen addirt und auf Null bringt, so ergibt sich zur Bestimmung der Umkehrungs-Coefficienten:

$$5)\quad 0 = \underbrace{-\,a + (\pi - u)\,.\,\cos.\,u + \sin.\,u}_{A} - \underbrace{(\pi - u)\,.\,\sin.\,u}_{B}\,.\,x - \underbrace{\frac{(\pi - u)\,.\,\cos.\,u - \sin.\,u}{1\,.\,2}}_{C}\,.\,x^2$$
$$+ \underbrace{\frac{(\pi - u)\,.\,\sin.\,u + 2\cos.\,u}{1\,.\,2\,.\,3}}_{D}\,.\,x^3 + \underbrace{\frac{(\pi - u)\,.\,\cos.\,u - 3\sin.\,u}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}}_{E}\,.\,x^4 - \underbrace{\frac{(\pi - u)\,.\,\sin.\,u + 4\cos.\,u}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}}_{F}\,.\,x^5 - \ldots$$

200. **Aufgabe.** Um zwei in einer Ebene liegende Kreisscheiben, deren bezügliche Halbmesser R und r sind, ist ein Riemen gelegt, wodurch die drehende Bewegung der einen Scheibe der andern mitgetheilt wird. Die Centrale ist gleich c, die Länge des Riemens gleich L. Wenn nun mit Beibehaltung der Centrale für die Scheibe von dem Halbmesser r eine andere von dem Halbmesser h eingesetzt wird, wie groß muß dann der Halbmesser H der andern Scheibe genommen werden, damit derselbe Riemen beibehalten werden kann?



Auflösung. Der in der Figur verzeichnete Winkel ϱ ergibt sich aus der Gleichung $c.\cos.\,\varrho = R - r$, also $\cos.\,\varrho = \frac{R - r}{c}$ und hieraus bestimmt sich die Länge des Riemens, nämlich:

1) $$\tfrac{1}{2}L = R\pi - (R - r)\ \text{arc. cos.}\ \frac{R - r}{c} + \sqrt{c^2 - (R - r)^2}$$

Ebenso findet sich:

2) $$\tfrac{1}{2}L = H\pi - (H - h)\ \text{arc. cos.}\ y + \sqrt{c^2 - (H - h)^2}.$$ Nun ist:

3) $$c\ .\ \cos.\ y = H - h \qquad \text{oder} \qquad H = h + c\ .\ \cos.\ y,$$ nämlich:

4) $$\tfrac{1}{2}L = (h + c\ .\ \cos.\ y)\ \pi - c\,y\ .\ \cos.\ y + c\ .\ \sin.\ y,$$ also:

5) $$\frac{\tfrac{1}{2}L - h\pi}{c} = a = \pi\ .\ \cos.\ y - y\ .\ \cos.\ y + \sin.\ y$$

Es sei z. B. $R = 4$
$r = 2$
$c = 12,$ so berechnet sich:
$\varrho = 80^0\ 24'\ 21'', 354$
arc. $\varrho = 1{,}403348246$
und $\tfrac{1}{2}\ L = 21{,}591833689.$
Ist ferner: $h = 1,$ so findet sich:
$a = 1{,}537520086$

und für diesen Werth von a ergibt sich (nach 5.)) für $u = 72^0$ nahe ein Werth von y. Es ist arc. $72^0 = 1{,}256637061$ und die Umkehrungs-Coefficienten berechnen sich:

$A = -\ 0{,}003980259$
$B = -\ 1{,}792699298$
$C = +\ 0{,}184286602$
$D = +\ 0{,}401788881$
$E = -\ 0{,}094611922$

Hieraus findet sich nach (34.) oder nach (146. 2.):

—

$$I = 0{,}0022202602$$
$$\overset{1}{III} = \overset{2}{3} = 0{,}0000000231$$
$$\overset{2}{III} = \overset{3}{3} = 0{,}0000000024$$
$$-\ 0{,}0022202857$$
$$+\ 0{,}0000050676$$
$$x = -\ 0{,}002215218$$
$$u = +\ 1{,}256637061$$
$$\text{arc.}\ y = +\ 1{,}254421843$$

+

$$II = \overset{2}{2} = 0{,}0000050675$$
$$\overset{1}{IV} = \overset{2}{4} = 0{,}0000000001$$
$$+\ 0{,}0000050676$$

$$y = 71^0\ 52'\ 23'',079$$
$$\log.\ \cos.\ y = 9{,}4929321580$$
$$\log.\ c = 1{,}0791812460$$
$$\log.\ (c\ .\ \cos.\ y) = 0{,}5721134040$$

$$c\ .\ \cos.\ y = 3{,}733476344$$
$$h = 1$$
$$H = 4{,}733476344$$

Berichtigungen.

1. Abtheilung.

Wo es in derselben heißt: „die Gleichung der Summen der Wurzeln der gegebenen Gleichung“ setze man: die Gleichung der Summen der entgegengesetzten Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Seite 52. Note zu 69. Zeile 3. Anstatt: „daß die Coefficienten des Gliedes“ setze man: daß die Coefficienten der Glieder mit ungeraden Exponenten den Coefficienten des Gliedes.

2. Abtheilung.

Seite 3.	Vertikalreihe $\overset{7}{\mathfrak{M}}_{III}$	C^3 und C^2 sind mit einander zu verwechseln.	
„ 3.	Horizontalreihe 8.	Anstatt: 8_0A^3	setze man: 8_0A^2
„ 3.	Fortsetzung der Horizontalreihe 11.	„ C_2	„ „ C^2
„ 3.	Letzte Zeile.	„ $\overset{8}{\mathfrak{M}}_{IX}$	„ „ $\overset{8}{\mathfrak{M}}_{VIII}$
„ 5.	Formel 9.	„ A_m	„ „ A^m
„ 6.	„ 30.	„ $(2m-p)_{m+p}$	„ „ $(2m-p)_{m-p}$
„ 12.	(115.) Zeile 5 v. u.	„ keinste	„ „ kleinste
„ 12.	Am Ende.	„ —	„ „ -3
„ 17.	(128. 10.)	$\overset{II}{s}$ und $\overset{III}{s}$ sind mit einander zu verwechseln.	
„ 21.	(136. 4.)	Im allgemeinen Gliede ist der Faktor D beizufügen.	
„ 22.	(138. 6.)	Anstatt: $\frac{1}{2z^5}$	setze man: $\frac{1}{2z^4}$
„ 25.	(145.) Zeile 6 v. o.	„ für welche	„ „ für welchen
„ 27.	Glied $\overset{7}{11}_{IV}$	„ D^2	„ „ D
„ 30.	Zeile 2 v. u.	„ indentisch	„ „ identisch
„ 31.	(154. 2.) Zeile 3.	„ uber	„ „ über
„ 32.	(156.)	„ 4) 4) 5)	„ „ 4) 5) 6)
„ 35.	(167.) Erster Satz.	„ „jeder Horizontalspalte in dieser Weise“	„ „ jeder Horizontalspalte, mit Ausnahme des Polynomialfaktors [1], in dieser Weise
„ 38.	(173.) Letzter Satz.	„ „ohne Ausnahme“	„ „ , mit Ausnahme des Polynomialfactors [1],
„ 38.	(174. 2.) Zeile 3.	„ „und es kann dieselbe“	„ „ und es kann die Richtigkeit derselben
„ 43.	Zeile 3 v. u.	„ u	„ „ ú
„ 46.	Zeile 4 v. u.	„ „bestimmt werden“	„ „ bestimmt wird
„ 47.	(187.) Zeile 4 v. o.	„ „in Reihen“	„ „ in eine Reihe
„ 47.	(187.) Zeile 6 v. o.	„ „dem Werthe von“	„ „ der
„ 48.	(190.) Zeile 1.	„ „welche ihrem“	„ „ welche dem Zehnfachen ihres
„ 50, 51, 52, 53.	Die Klammern der Umkehrungs-Coefficienten A haben nur bis an das Gleichheitszeichen zu reichen.		

Förster Buchh.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kerz, Ferd.

Die allgemeine Umkehrung der Reihen nebst Anwendung derselben auf die vollständige Lösung numerischer Gleichungen

Bd.: 2

Giessen 1861

4 Math.p. 172 l-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053569-9